

Divide et Impera

Sia

$$z^* = \max \{c^T x : x \in S\} \quad (1)$$

un problema di OC difficile da risolvere

Domanda

Voglio decomporre il problema (1) in una collezione di problemi tali che

1. Ogni nuovo problema sia facile da risolvere
2. Le informazioni che ottengo risolvendo la collezione di problemi mi indicano la sol. ottima di (1)

Un semplice teoremino

Sia $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ una decomposizione della regione ammissibile S in k insiemi

Teorema

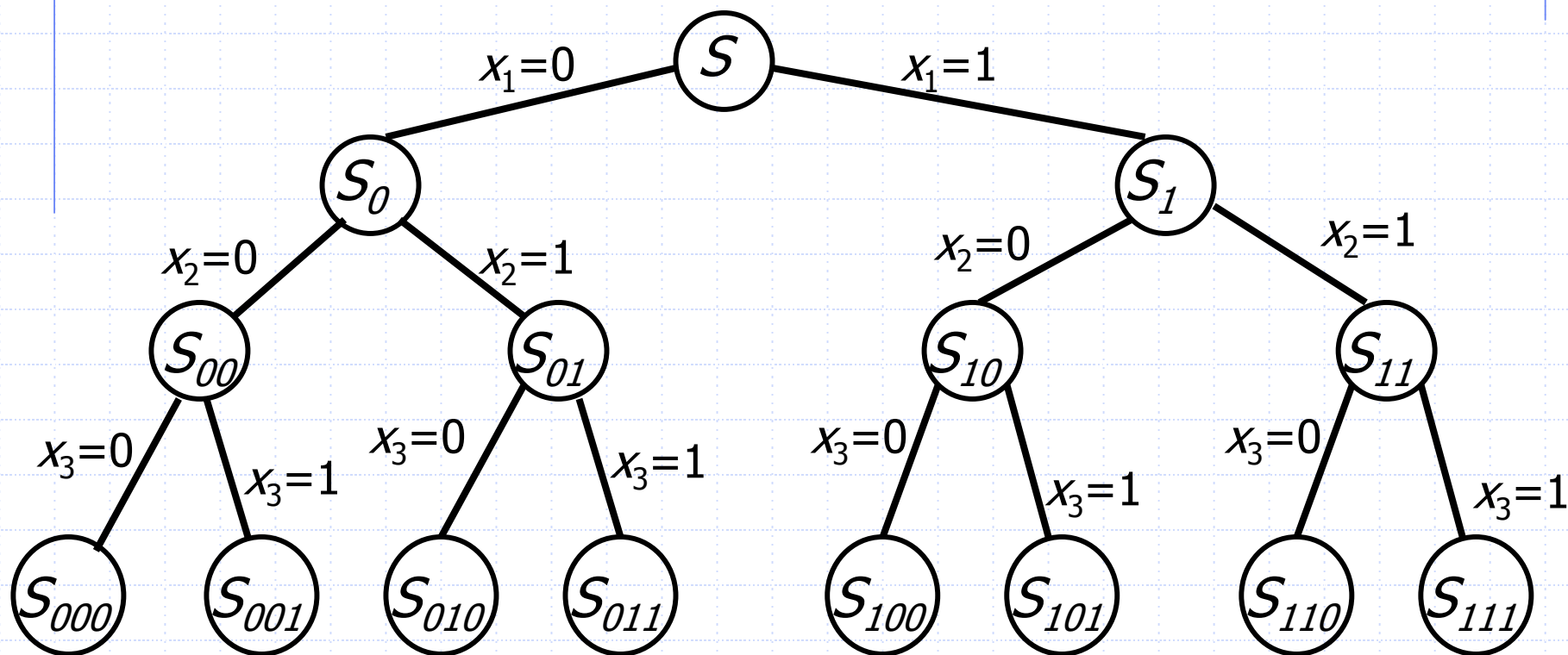
Se $z^h = \max \{c^T x : x \in S_h\}$ allora $z^* = \max_h z^h$

Attenzione

Non ho **richiesto** che $S_i \cap S_j = \emptyset$, ovvero che la decomposizione sia una partizione, ma non ho escluso che possa essere una partizione!

Un esempio

Consideriamo $S = \{0,1\}^3$



Attenzione...

Stiamo semplicemente enumerando TUTTI gli insiemi ammissibili!!!!

Per un problema di OC conosciamo bound "primali" e "duali"

Domanda

Possiamo utilizzare questi bound per enumerare in modo più efficace?

Altro teoremino

Sia $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ una decomposizione della regione ammissibile S in k insiemi.

Sia $z^* = \max \{c^T x : x \in S_k\}$

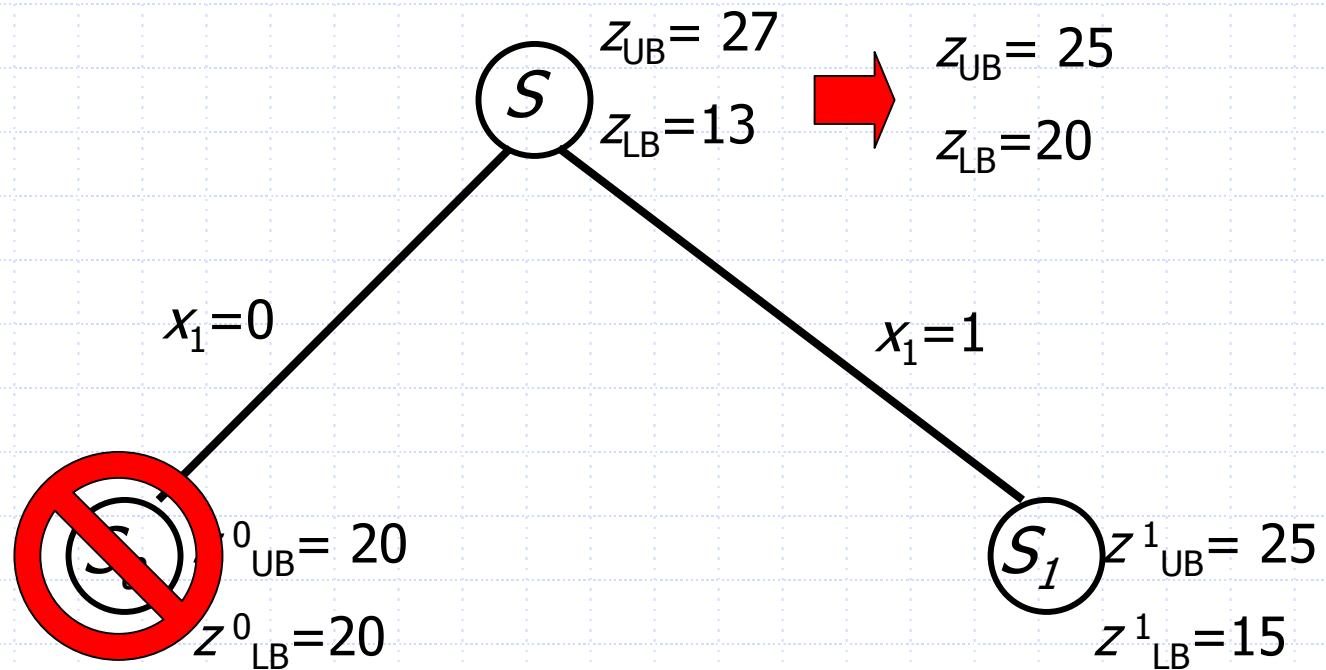
Se z_{LB}^* e z_{UB}^* sono rispettivamente un lower e un upper bound per z^*

Allora

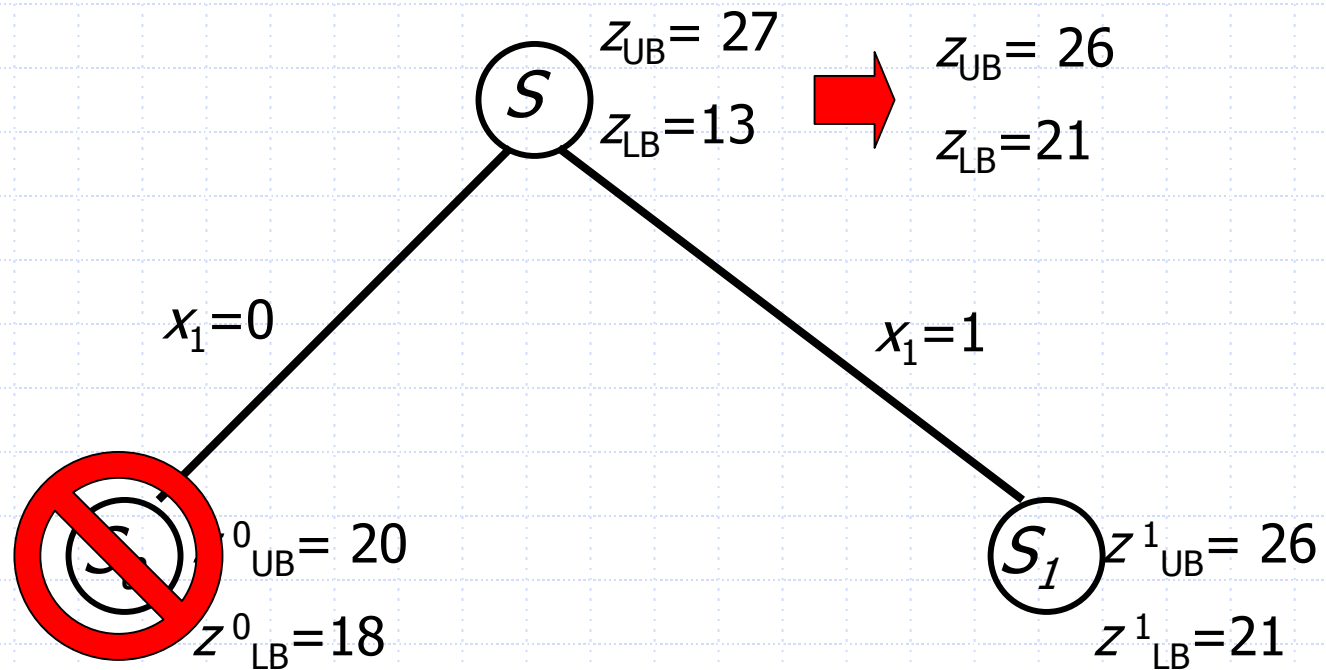
$z_{UB} = \max_k z_{UB}^*$ è un upper bound per z^*

$z_{LB} = \max_k z_{LB}^*$ è un lower bound per z^*

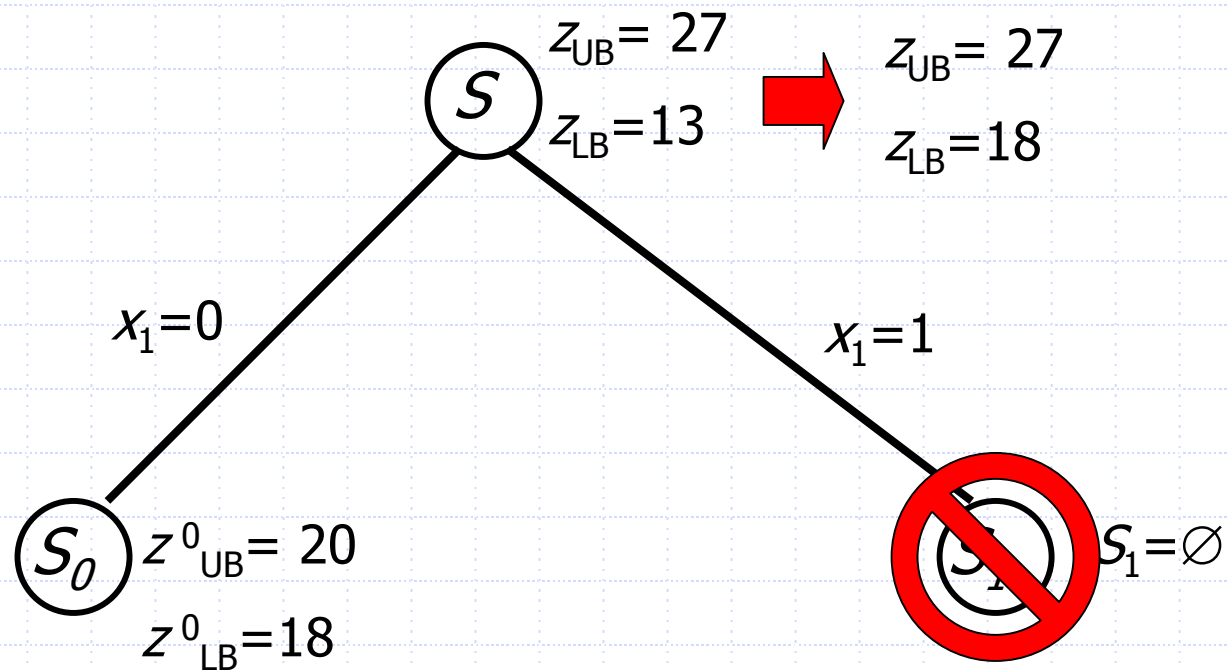
Potatura per ottimalità



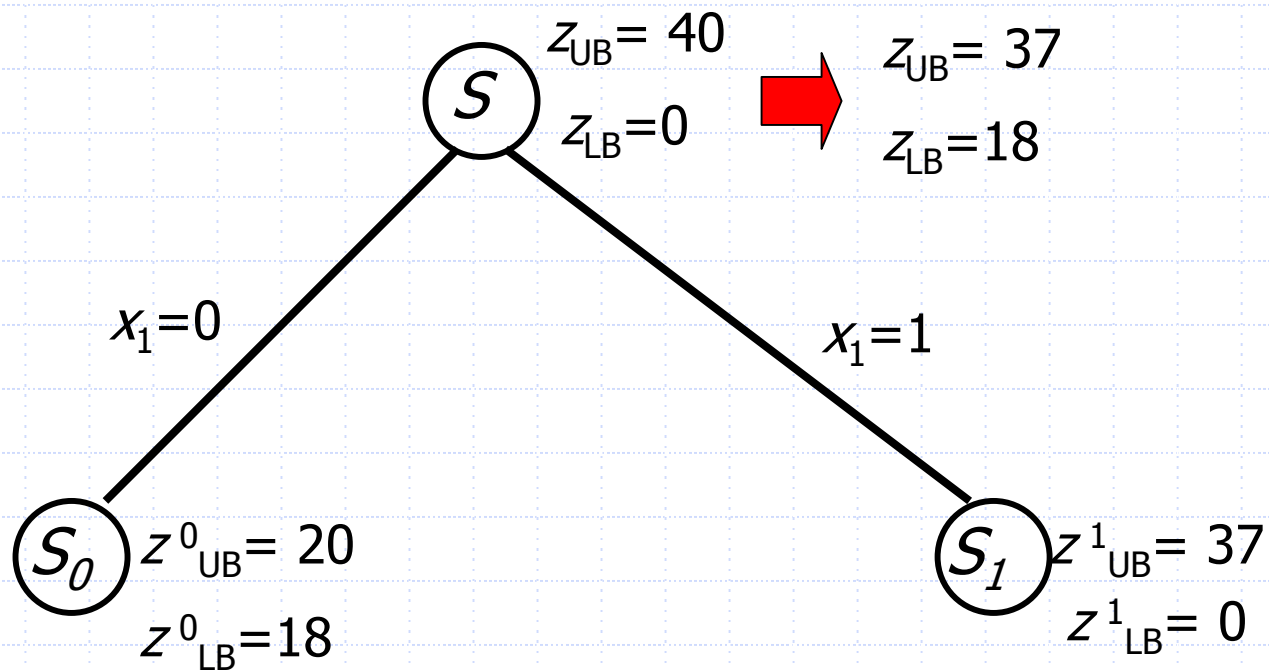
Potatura per bound



Potatura per inammissibilità



Nessuna potatura



Ricapitolando...

Enumero un insieme di soluzioni
“implicitamente” perché “poto” rami
dell'albero per:

1. Ottimalità
2. Bound
3. Inammissibilità

Esempio

Consideriamo il problema di knapsack

$$\begin{aligned} \max & 9 x_1 + 15 x_2 + 8 x_3 + 6 x_4 + 5 x_5 + 4 x_6 + x_7 \\ & 6 x_1 + 11 x_2 + 6 x_3 + 5 x_4 + 5 x_5 + 4 x_6 + x_7 \leq 19 \\ & (1) \end{aligned}$$

$$x \in \{0,1\}^7$$

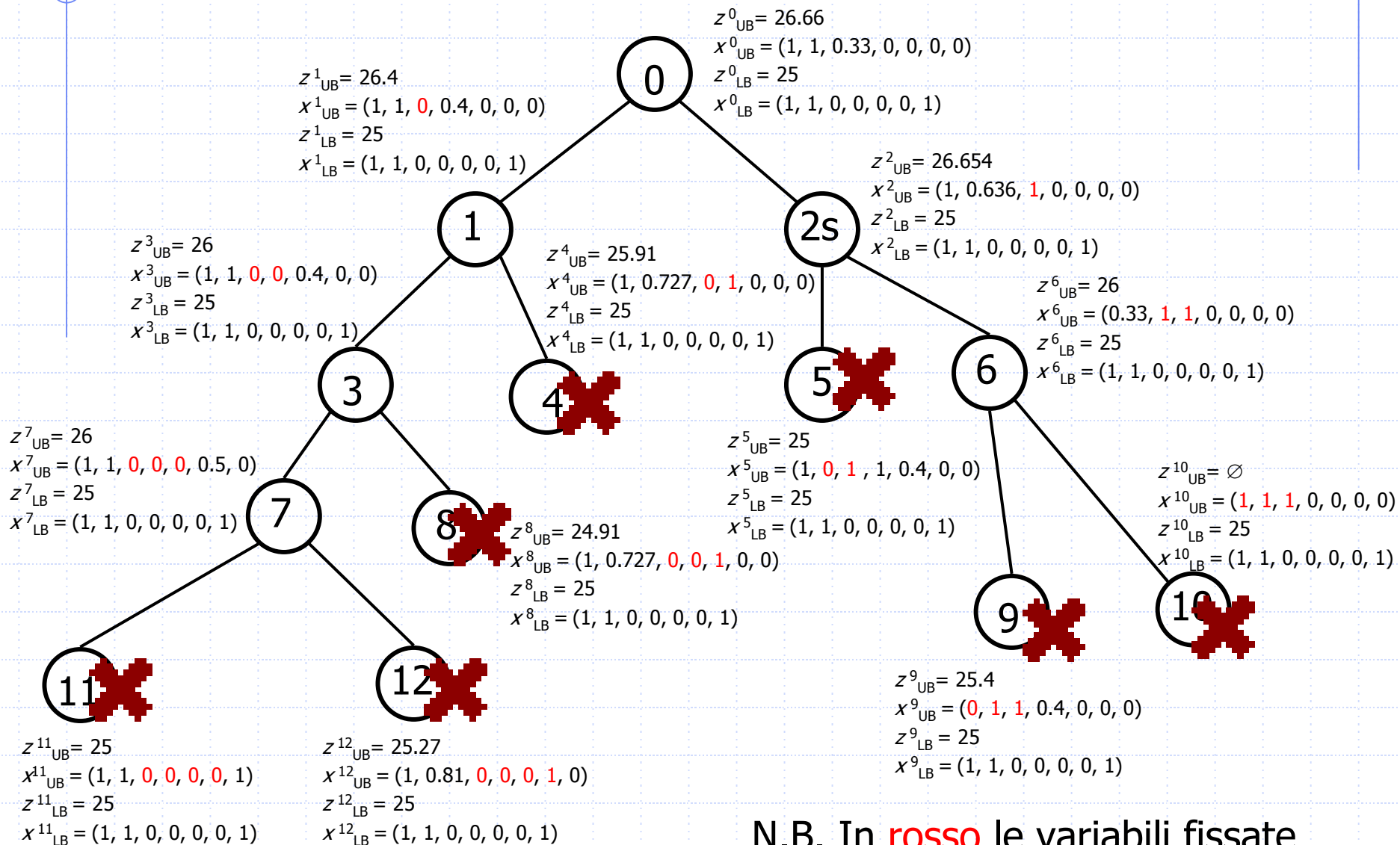
La soluzione ottima del rilassamento lineare è

$$x_{LP}^* = (1, 1, 1/3, 0, 0, 0, 0) \text{ di valore } 26.666 \text{ (UB)}$$

Una soluzione ammissibile è

$$(1, 1, 0, 0, 0, 0, 1) \text{ di valore } 25$$

Esempio: $\{9, 15, 8, 6, 5, 4, 1\}$
 $\{6, 11, 6, 5, 5, 4, 1\}$
 $b = 19$



N.B. In **rosso** le variabili fissate