

Ottimalità, rilassamenti e bound

Consideriamo il seguente problema

$$z^* = \max \{c^T x : x \in X, X \subseteq \{0,1\}^n\}$$

z^* è il valore della soluzione ottima x^* .

Domanda

In che modo è possibile certificare che la soluzione x^* è ottima?

In generale, se disponessimo di un algoritmo che genera le due sequenze di soluzioni:

$$\begin{aligned} z^{UB\ 1} &\geq z^{UB\ 2} \geq \dots \geq z^{UB\ h} \geq z^* \\ z^{LB\ 1} &\leq z^{LB\ 2} \leq \dots \leq z^{LB\ k} \leq z^* \end{aligned}$$

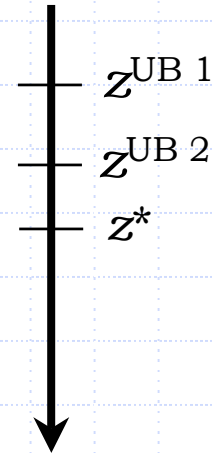
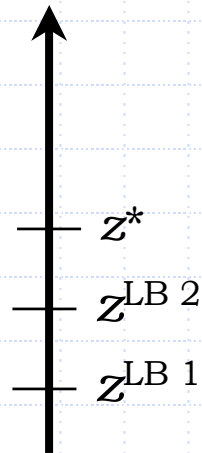
Potremmo fornire come criterio di arresto

$$z^{UB\ h} - z^{LB\ k} \leq \varepsilon (> 0)$$

Lower (upper) bound

Bound “primali”

Ogni soluzione $x \in X$ ammissibile è un *lower (upper) bound* per un problema di massimizzazione (minimizzazione)



Upper (lower) bound

Bound “duali”

Al contrario dei bound “primali”, trovare upper (lower) bound di buona qualità per problemi di massimo (minimo) è tipicamente difficile

Buoni bound “duali” si ottengono attraverso lo studio delle proprietà strutturali del problema di OC

Le proprietà di un problema di OC si caratterizzano tramite

1. Rilassamenti del problema
2. Definizione e studio di problemi “duali”

Rilassamento

Definizione

Il problema

$$(RP) \ z^R = \max \{f(x) : x \in T, T \subseteq R^n\} \ (z^R = \min \{f(x) : x \in T, T \subseteq R^n\})$$

si definisce rilassamento del problema

$$(P) \ z = \max \{c^T x : x \in X, X \subseteq \{0,1\}^n\} \ (z = \min \{c^T x : x \in X, X \subseteq \{0,1\}^n\})$$

se e solo se:

$$i) \quad X \subseteq T$$

$$ii) \quad f(x) \geq c^T x \text{ per ogni } x \in X \quad (f(x) \leq c^T x \text{ per ogni } x \in X)$$

Proprietà 1. Se RP è un rilassamento di P, allora $z^R \geq z^*$ ($z^R \leq z^*$)

Proprietà 2. Se x^R sol. ottima di RP è ammissibile per P allora $x^R = x^*$

Esempi di rilassamenti

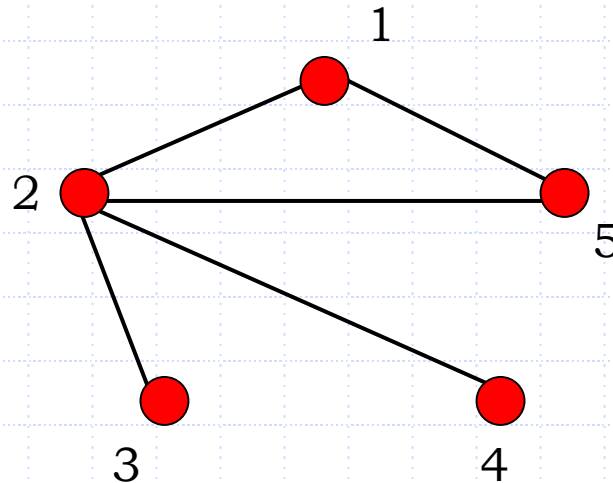
Problema del commesso viaggiatore (simmetrico)

Dati: grafo $G=(V,E)$, pesi sugli archi c_e per ogni arco $e \in E$

Domanda: trovare il ciclo hamiltoniano di peso minimo

Definizione: Un *1-albero* è un sottografo di G consistente di due archi adiacenti al nodo 1 più gli archi di un albero ricoprente i nodi $\{2, \dots, n\}$

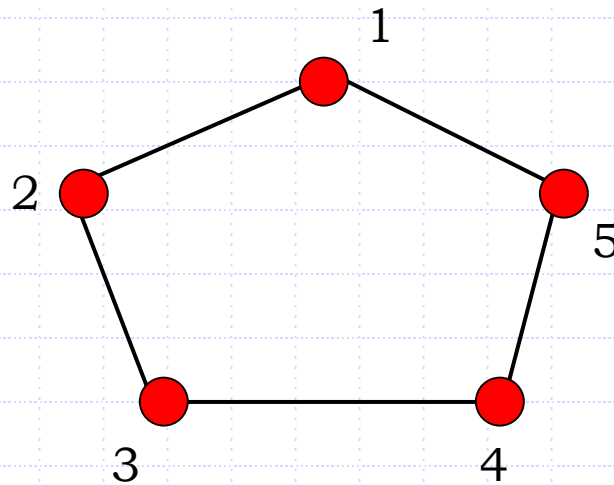
Esempio



Rilassamenti per il TSP

Osservazione

Un ciclo hamiltoniano è un particolare 1-albero



Pertanto, il problema

Dati: grafo $G = (V, E)$, pesi sugli archi c_e per ogni arco $e \in E$

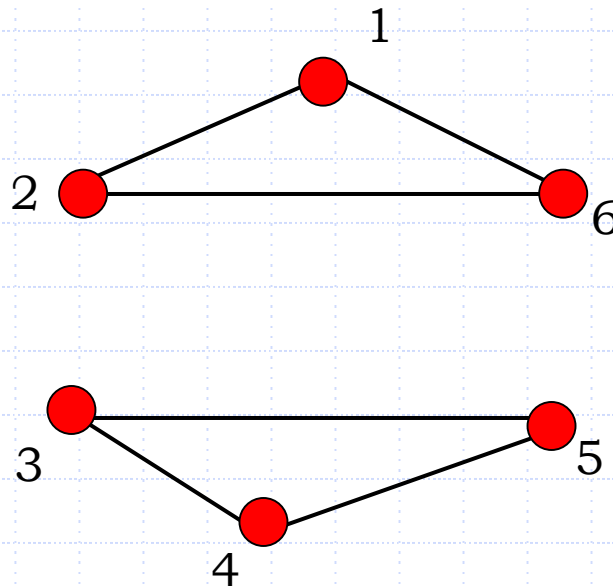
Domanda: trovare l'1-albero di peso minimo

è un **rilassamento** del problema del TSP, perché l'insieme X di tutti i cicli hamiltoniani è \subseteq nell'insieme T di tutti gli 1-alberi

Rilassamenti per il TSP

Definizione

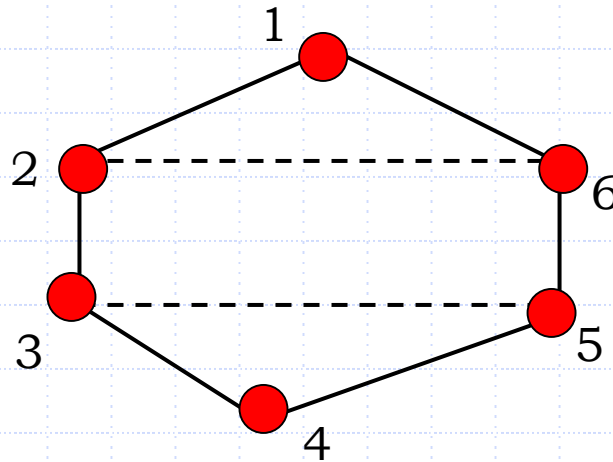
Un 2-abbinamento è un insieme di archi tali che ...



Rilassamenti per il TSP

Osservazione

Un ciclo hamiltoniano è un particolare 2-abbinamento, difatti è un 2-abbinamento privo di sottocicli (subtour)



Pertanto, il problema

Dati: grafo $G = (V, E)$, pesi sugli archi c_e per ogni arco $e \in E$

Domanda: trovare il 2-abbinamento di peso minimo

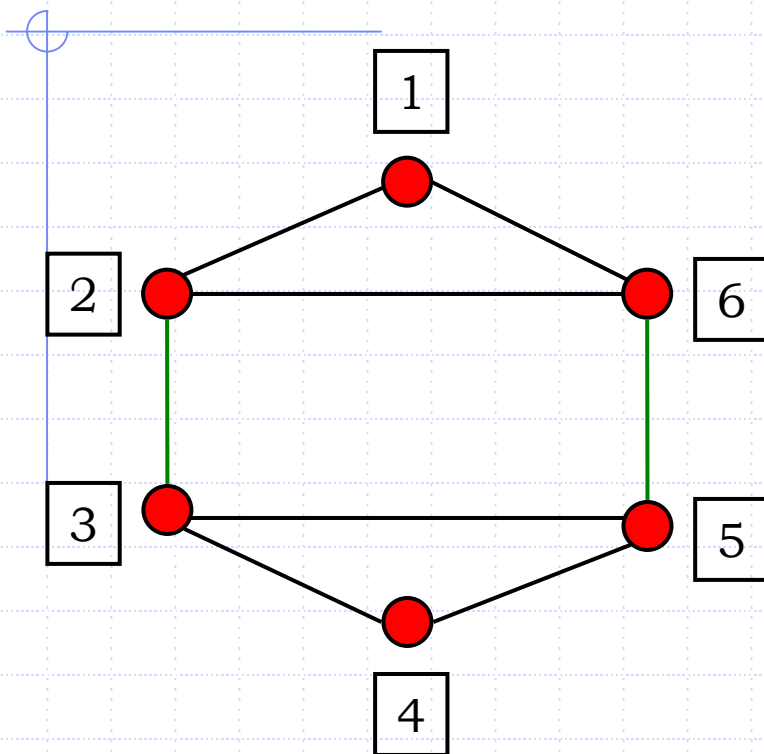
è un **rilassamento** del problema del TSP, perché l'insieme X di tutti i cicli hamiltoniani è \subseteq nell'insieme T di tutti i 2-abbinamenti

Un esempio

Consideriamo la seguente istanza del problema del Commesso Viaggiatore:

	1	2	3	4	5	6
1	-	1	99	99	99	1
2	1	-	10	99	99	1
3	99	10	-	1	1	99
4	99	99	1	-	1	99
5	99	99	1	1	-	10
6	1	1	99	99		-

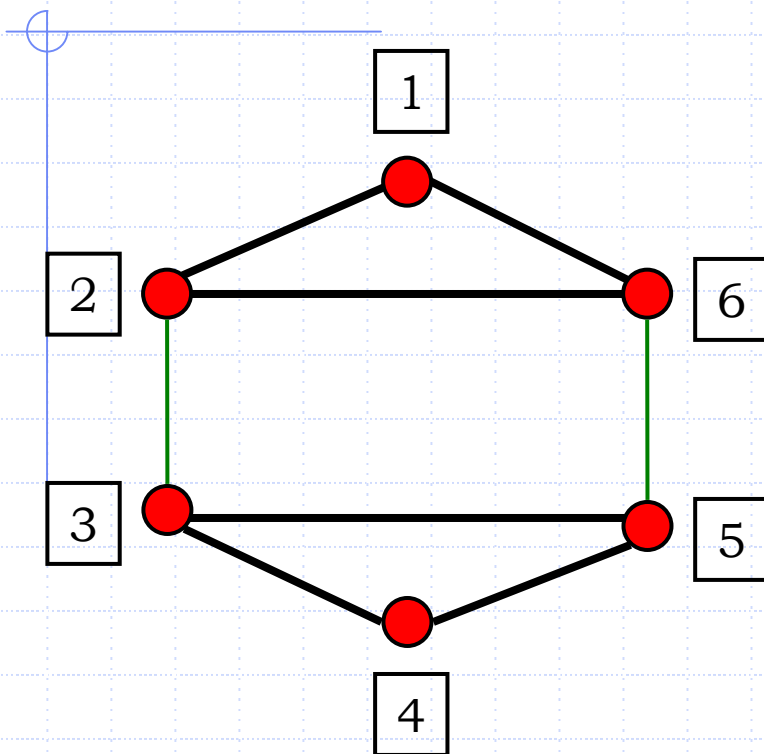
Un esempio



	1	2	3	4	5	6
1	-	1	99	99	99	1
2	1	-	10	99	99	1
3	99	10	-	1	1	99
4	99	99	1	-	1	99
5	99	99	1	1	-	10
6	1	1	99	99		-

Un esempio

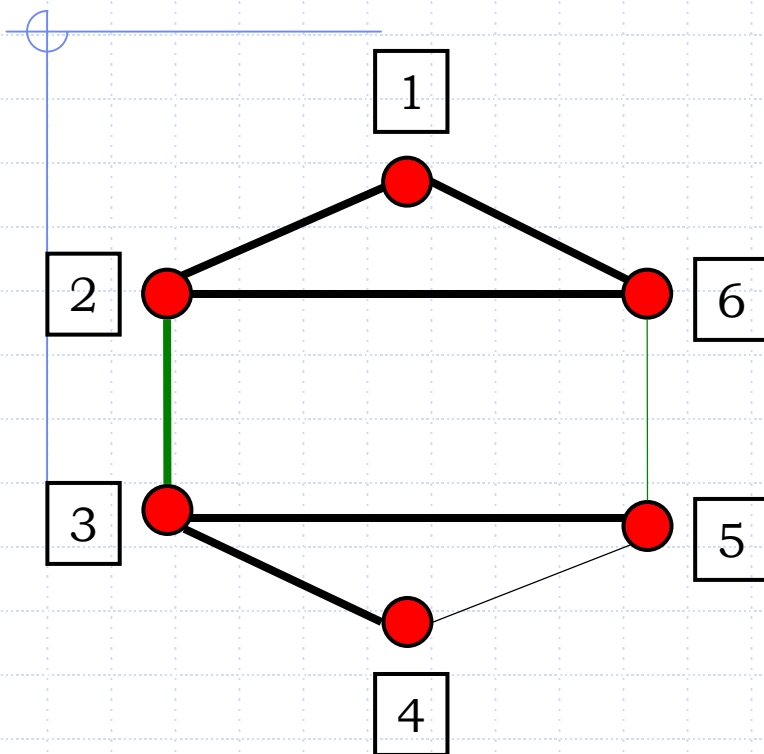
Il 2 abbinamento di peso minimo ha valore 6



	1	2	3	4	5	6
1	-	1	99	99	99	1
2	1	-	10	99	99	1
3	99	10	-	1	1	99
4	99	99	1	-	1	99
5	99	99	1	1	-	10
6	1	1	99	99	10	-

Un esempio

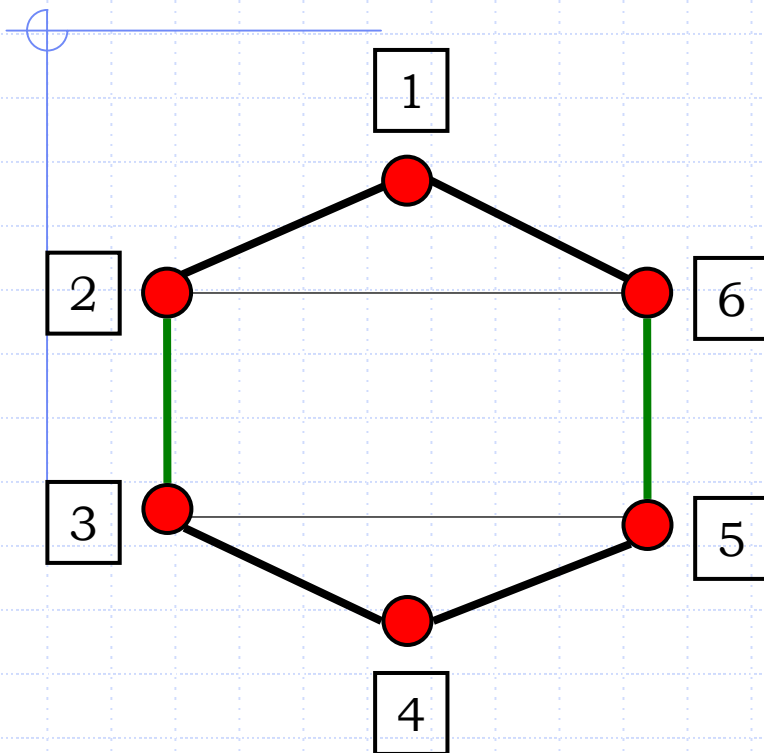
L'1-albero di peso minimo ha
valore 15



	1	2	3	4	5	6
1	-	1	99	99	99	1
2	1	-	10	99	99	1
3	99	10	-	1	1	99
4	99	99	1	-	1	99
5	99	99	1	1	-	10
6	1	1	99	99	10	-

Un esempio

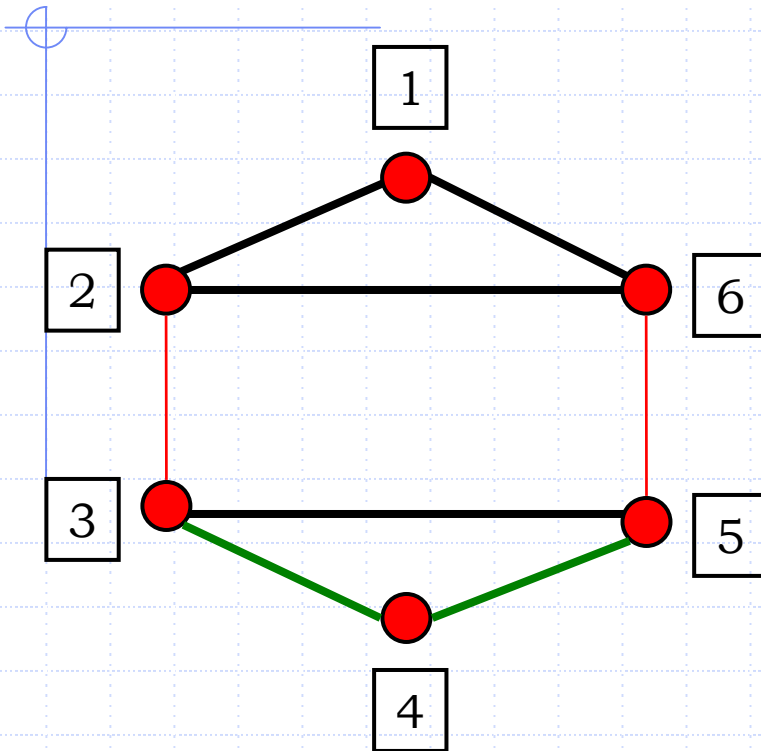
Il ciclo hamiltoniano di peso minimo ha valore 24



	1	2	3	4	5	6
1	-	1	99	99	99	1
2	1	-	10	99	99	1
3	99	10	-	1	1	99
4	99	99	1	-	1	99
5	99	99	1	1	-	10
6	1	1	99	99	10	-

Un esempio (2)

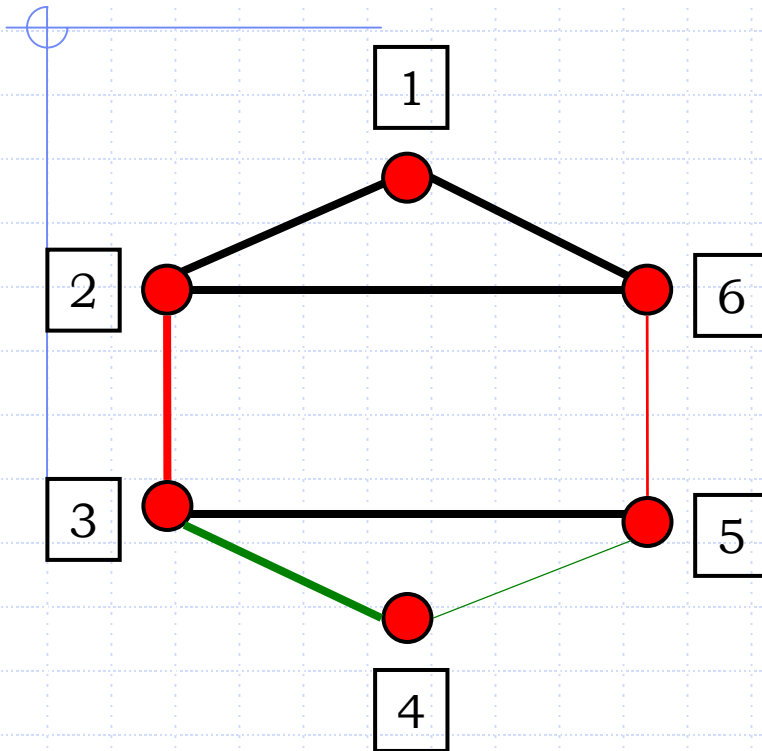
Il 2 abbinamento di peso minimo ha valore 24



	1	2	3	4	5	6
1	-	1	99	99	99	1
2	1	-	5	99	99	1
3	99	5	-	10	1	99
4	99	99	10	-	10	99
5	99	99	1	10	-	5
6	1	1	99	99	5	-

Un esempio (2)

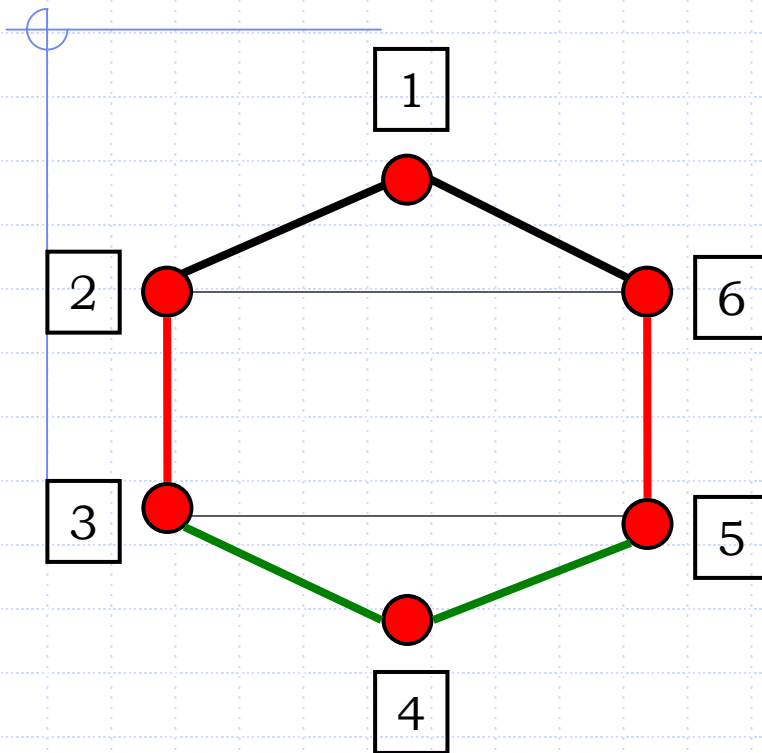
L'1-albero di peso minimo
ha valore 19



	1	2	3	4	5	6
1	-	1	99	99	99	1
2	1	-	5	99	99	1
3	99	5	-	10	1	99
4	99	99	10	-	10	99
5	99	99	1	10	-	5
6	1	1	99	99	5	-

Un esempio (2)

Il ciclo hamiltoniano di peso minimo ha valore 32



	1	2	3	4	5	6
1	-	1	99	99	99	1
2	1	-	5	99	99	1
3	99	5	-	10	1	99
4	99	99	10	-	10	99
5	99	99	1	10	-	5
6	1	1	99	99	5	-

Ricapitolando...

Abbiamo definito per il TSP due lower bound con le seguenti proprietà:

1. Sono lower bound “combinatori”, ovvero si ottengono tramite la soluzione di un problema di OC
2. Tutti e due i problemi la cui soluzione genera i lower bound sono “facili”, ovvero hanno complessità polinomiale

La proprietà 2. è una proprietà chiave per ogni bound duale

Difatti, se fosse il calcolo del bound fosse un problema NP-completo sappiamo che calcolare il bound diventa almeno tanto difficile quanto risolvere il problema stesso.

Esistono altre tipi di rilassamento?