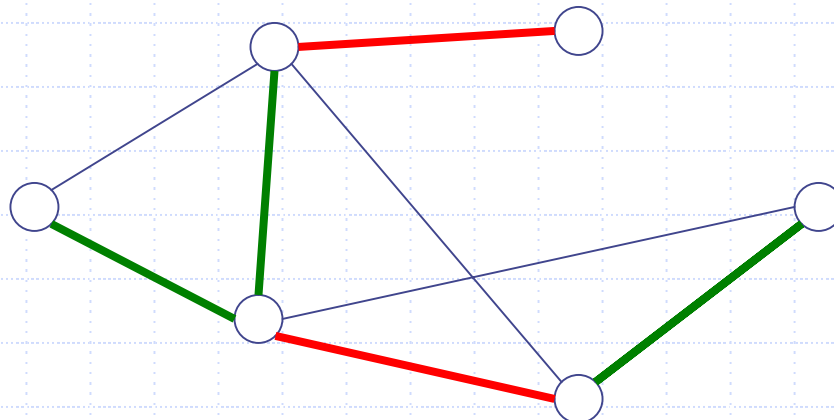


# Cammino alternante

Sia  $A$  un abbinamento di  $G$

## Definizioni

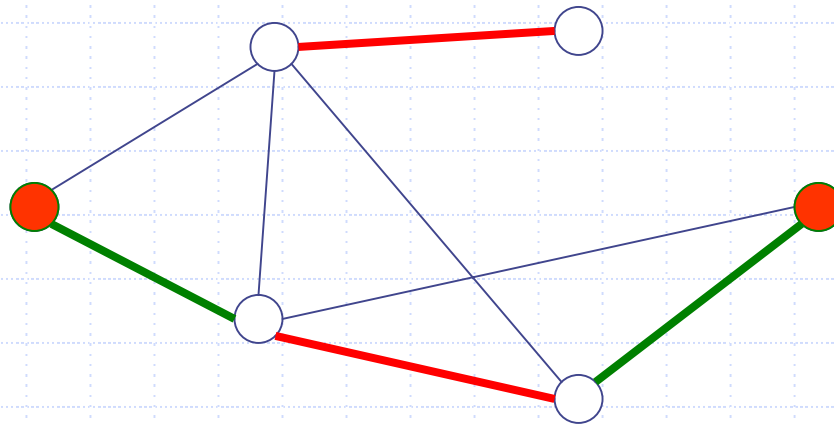
- Uno spigolo  $(i, j)$  di  $G$  si dice **accoppiato** (**libero**) se  $(i, j) \in A$  ( $(i, j) \notin A$ ).
- Un vertice  $i$  di  $G$  si dice **accoppiato** (**esposto**) se su di esso **incide** (**non incide**) uno spigolo di  $A$
- Un cammino  $P$  di  $G$  si dice **alternante** rispetto ad  $A$  se è costituito alternativamente da spigoli accoppiati e liberi.



# Cammini aumentanti

## Definizione

Un cammino  $P$  alternante rispetto ad  $A$  che abbia entrambi gli estremi esposti si dice **aumentante**



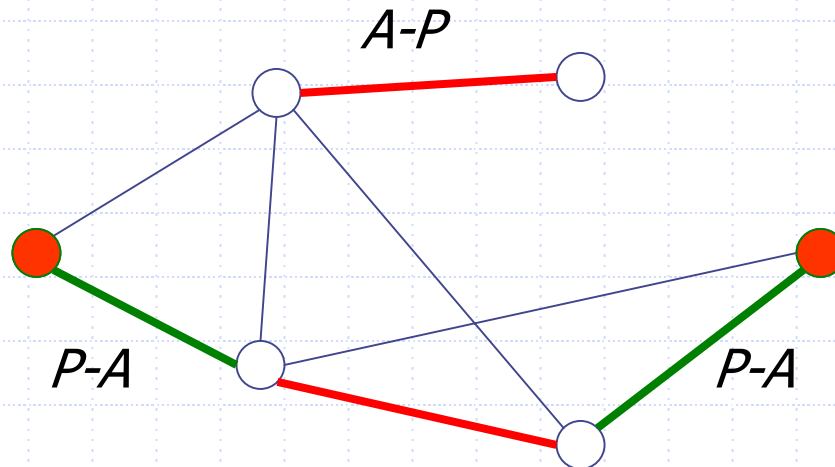
# "Aumentare" un abbinamento

## Teorema

Sia  $A$  un abbinamento di  $G$  e sia  $P$  un cammino aumentante. La differenza simmetrica

$$A' = (A - P) \cup (P - A) = A \oplus P$$

è un abbinamento di cardinalità  $|A| + 1$ .



# Dimostrazione (I)

Sia  $A$  un abbinamento di  $G$  e sia  $P$  un cammino alternante rispetto ad  $A$  che sia anche aumentante. L'insieme

$$D = (A - P) \cup (P - A)$$

gode delle seguenti proprietà

1) è un abbinamento

Difatti, se  $D$  non fosse un abbinamento allora esisterebbero almeno due spigoli di  $D$  tra loro adiacenti. Questi due spigoli

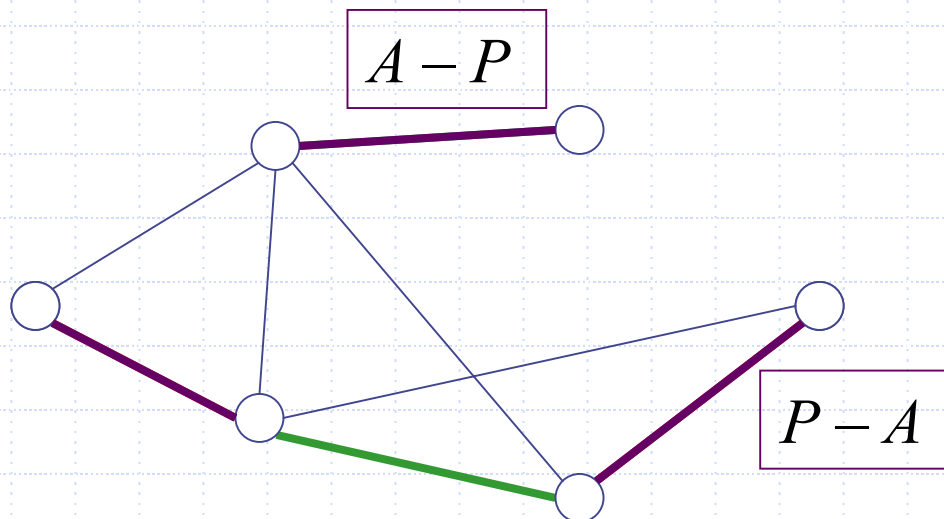
1. Non possono appartenere **entrambi ad  $A$**  perché  $A$  è un abbinamento.
2. Non possono appartenere **entrambi a  $P$**  perché  $P$  è alternante.

Ma se **uno** di essi **è in  $A$**  e **l'altro è in  $P$** , allora devono necessariamente appartenere a  $P$ , contro la definizione di  $D$ .

## Dimostrazione (II)

2) ha un elemento più di  $A$

Difatti:



# Teorema di Berge

Teorema (Berge, 1957) Un abbinamento  $A$  di  $G$  è massimo **se e solo se**  $G$  non ammette cammini alternanti rispetto ad  $A$  che siano anche aumentanti.

## Dimostrazione

( $\Leftarrow$ ). vedi Teorema precedente

# Teorema di Berge

## Dimostrazione ( $\Rightarrow$ ).

Supponiamo che  $G$  ammetta un abbinamento  $B$  con un elemento più di  $A$ .

Consideriamo il sottografo  $G'$  di  $G$  individuato dall'insieme di archi

$$F = (A \cup B) / (A \cap B)$$

e da tutti i loro estremi.

Poiché  $A$  e  $B$  sono abbinamenti, i vertici di  $G'$  hanno grado  $\leq 2$ .

Quindi le componenti connesse di  $G'$  sono percorsi o cicli.

# Teorema di Berge

Nessun ciclo può essere dispari

altrimenti  $A$  o  $B$  non sarebbero abbinamenti

Non tutti i percorsi sono pari

altrimenti  $|A| = |B|$

Quindi, senza perdere di generalità, esiste un percorso con un numero dispari di archi che inizia e termina con archi di  $B$

Tale percorso è evidentemente **umentante** rispetto ad  $A$



# Un possibile algoritmo

```
A =  $\emptyset$ ; //Inizializzazione
trovato = TRUE;
while (trovato) {
    search (A, &trovato);
    if (trovato)
        aumenta (G, &A);
}
```

Come è fatta `search (G, A, &trovato)`?