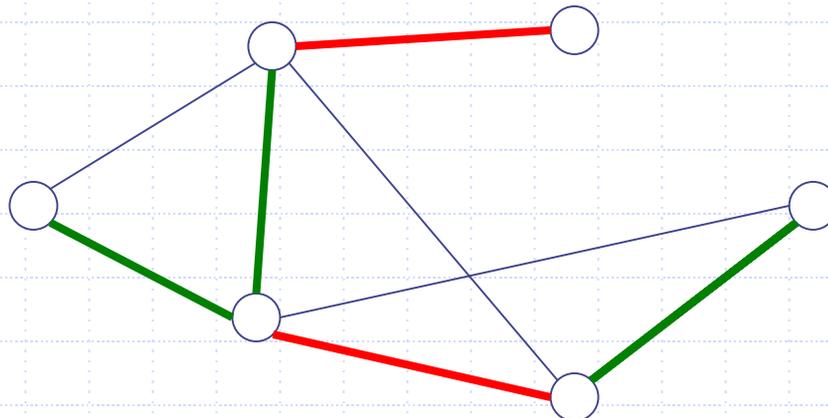


Cammino alternante

Sia A un abbinamento di G

Definizioni

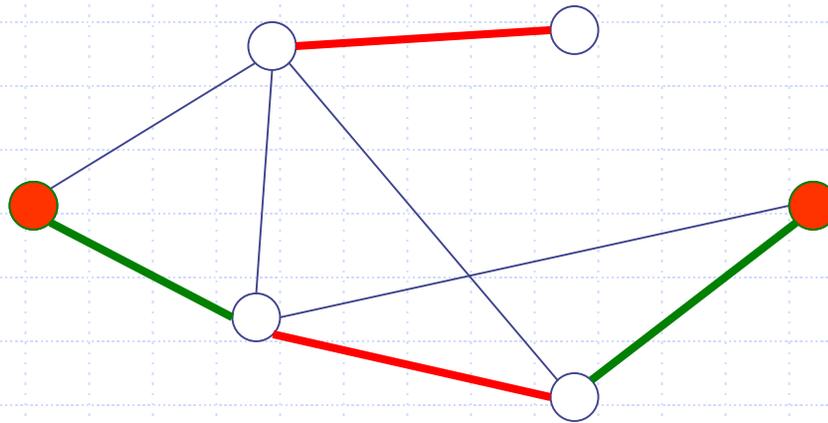
- Uno spigolo (i, j) di G si dice **accoppiato** (**libero**) se $(i, j) \in A$ ($(i, j) \notin A$).
- Un vertice i di G si dice **accoppiato** (**esposto**) se su di esso **incide** (**non incide**) uno spigolo di A
- Un cammino P di G si dice **alternante** rispetto ad A se è costituito alternativamente da spigoli accoppiati e liberi.



Cammini aumentanti

Definizione

Un cammino P alternante rispetto ad A che abbia entrambi gli estremi esposti si dice **aumentante**



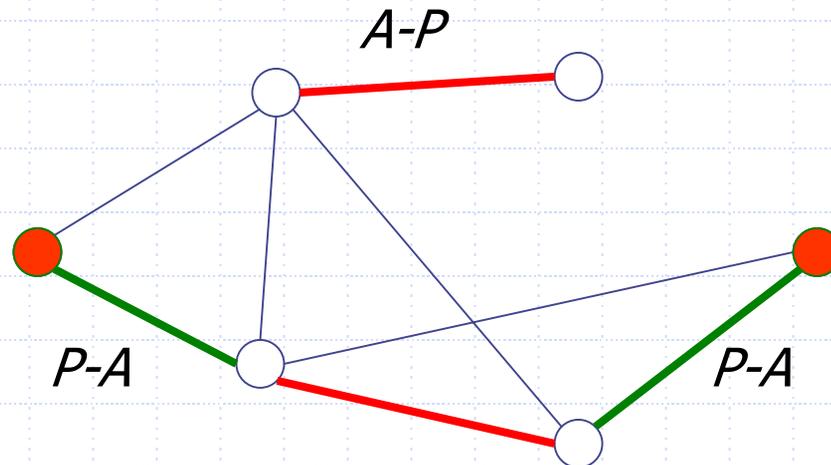
"Aumentare" un abbinamento

Teorema

Sia A un abbinamento di G e sia P un cammino aumentante. La differenza simmetrica

$$A' = (A - P) \cup (P - A) = A \oplus P$$

è un abbinamento di cardinalità $|A| + 1$.



Dimostrazione (I)

Sia A un abbinamento di G e sia P un cammino alternante rispetto ad A che sia anche aumentante. L'insieme

$$D = (A - P) \cup (P - A)$$

gode delle seguenti proprietà

1) è un abbinamento

Difatti, se D non fosse un abbinamento allora esisterebbero almeno due spigoli di D tra loro adiacenti. Questi due spigoli

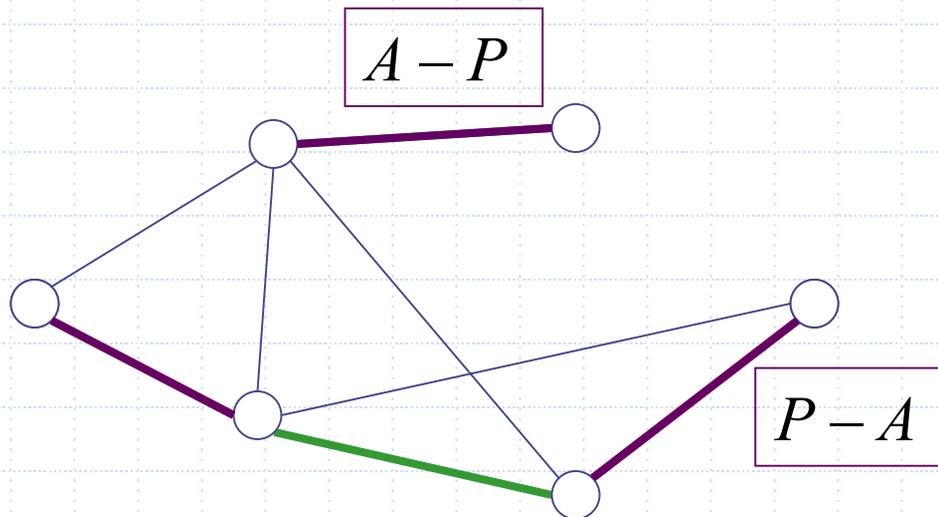
1. Non possono appartenere **entrambi ad A** perché A è un abbinamento.
2. Non possono appartenere **entrambi a P** perché P è alternante.

Ma se **uno** di essi **è in A** e **l'altro è in P** , allora devono necessariamente appartenere a P , contro la definizione di D .

Dimostrazione (II)

2) ha un elemento più di A

Difatti:



Teorema di Berge

Teorema (Berge, 1957) Un abbinamento A di G è massimo **se e solo se** G non ammette cammini alternanti rispetto ad A che siano anche aumentanti.

Dimostrazione

(\Leftarrow). vedi Teorema precedente

Teorema di Berge

Dimostrazione (\Rightarrow).

Supponiamo che G ammetta un abbinamento B con un elemento più di A .

Consideriamo il sottografo G' di G individuato dall'insieme di archi

$$F = (A \cup B) / (A \cap B)$$

e da tutti i loro estremi.

Poiché A e B sono abbinamenti, i vertici di G' hanno grado ≤ 2 .

Quindi le componenti connesse di G' sono percorsi o cicli.

Teorema di Berge

Nessun ciclo può essere dispari

altrimenti A o B non sarebbero abbinamenti

Non tutti i percorsi sono pari

altrimenti $|A| = |B|$

Quindi, senza perdere di generalità, esiste un percorso con un numero dispari di archi che inizia e termina con archi di B

Tale percorso è evidentemente **umentante** rispetto ad A

Un possibile algoritmo

```
A =  $\emptyset$ ; //Inizializzazione
trovato = TRUE;
while (trovato) {
    search (A, &trovato);
    if (trovato)
        aumenta (G, &A);
}
```

Come è fatta `search (G, A, &trovato)`?