

# Teorema di Gallai

Teorema (Gallai 1959).

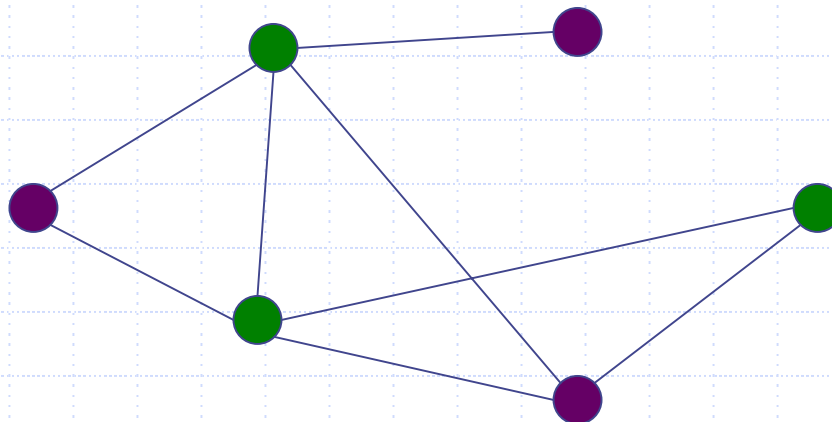
Per ogni grafo  $G$  con  $n$  nodi si ha:

$$\alpha(G) + \tau(G) = n \quad (1)$$

Se inoltre  $G$  non ha nodi isolati

$$\mu(G) + \rho(G) = n \quad (2)$$

Esempio (1)



# Teorema di Gallai

Teorema (Gallai 1959).

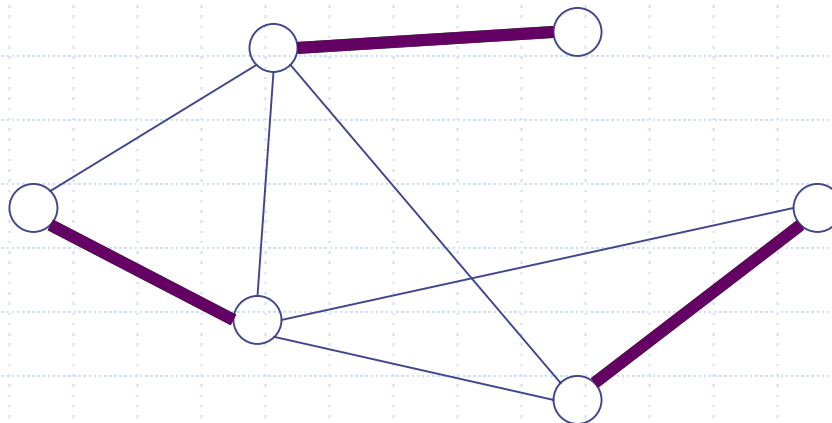
Per ogni grafo  $G$  con  $n$  nodi si ha:

$$\alpha(G) + \tau(G) = n \quad (1)$$

Se inoltre  $G$  non ha nodi isolati

$$\mu(G) + \rho(G) = n \quad (2)$$

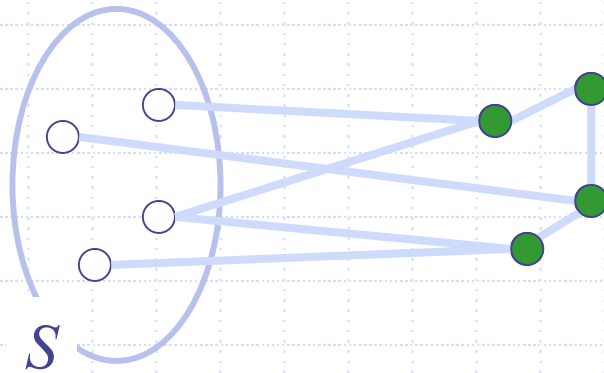
Esempio (2)



# Dimostrazione (I)

## Dimostrazione:

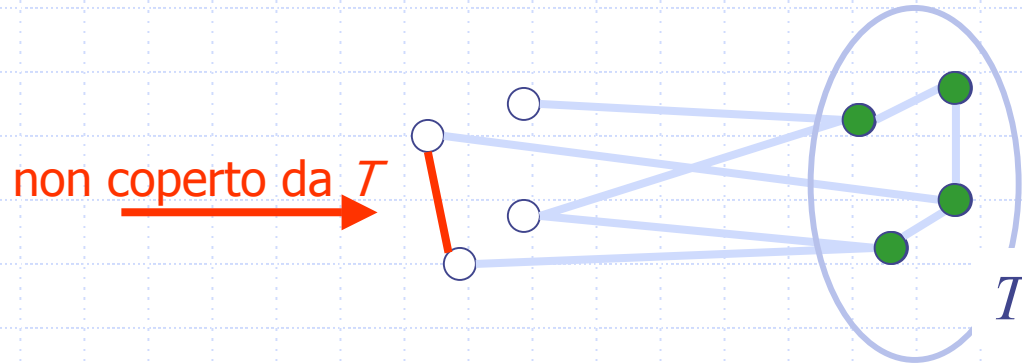
(1) Sia  $S$  stabile in  $G$ . Allora  $V - S$  è un trasversale di  $G$



Se  $|S^*| = \alpha(G)$ , allora  $\tau(G) \leq |V - S^*| = n - \alpha(G)$ .

## Dimostrazione (II)

Viceversa, se  $T$  è un **trasversale**,  $V - T$  è **stabile** in  $G$



Posto quindi  $\tau(G) = |T^*|$ , si ha

$$\alpha(G) \geq |V - T^*| = n - \tau(G)$$

che insieme a

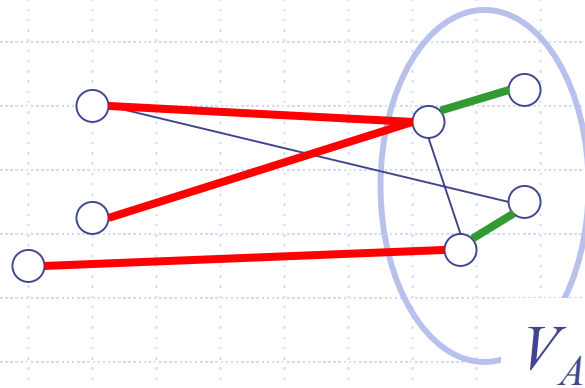
$$\tau(G) \leq |V - S^*| = n - \alpha(G)$$

dimostra

$$\alpha(G) = n - \tau(G)$$

## Dimostrazione (III)

(2)  $G$  privo di nodi isolati,  $A$  abbinamento di  $G$ ,  $V_A$  insieme dei nodi saturi rispetto ad  $A$



$H$  insieme minimale di archi di  $G$  tale che ogni nodo in  $V - V_A$  è estremo di qualche arco in  $H$ .

$$|H| = |V - V_A| = n - 2 |A|$$

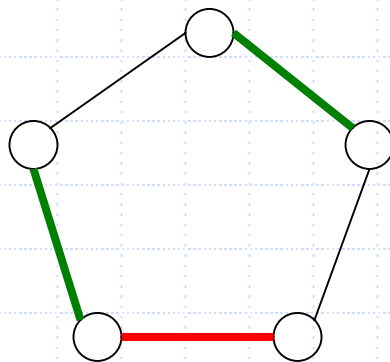
Osservazione:

$C = A \cup H$  è un edge-cover

## Dimostrazione (IV)

Quindi

1. Scelgo un abbinamento  $A$  di cardinalità pari a  $\mu(G)$
2. Costruisco l'insieme  $C = A \cup H$



Poiché  $C$  è un edge-cover, si ha  $|C| \geq \rho(G)$

Pertanto

$$\rho(G) \leq |C| = |A| + |H| = n - \mu(G)$$

## Dimostrazione (V)

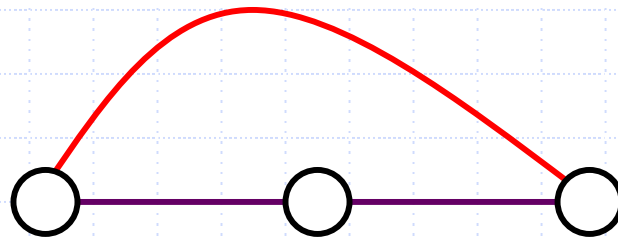
Sia  $C$  un edge-cover di  $G$ , con  $|C| = \rho(G)$

Sia  $H = (V, C)$  il sottografo indotto da  $C$

Valgono le seguenti proprietà:

1)  $H$  è un grafo aciclico

Difatti, se  $H$  contenesse cicli allora  $C$  non sarebbe un edge-cover minimo (l'arco rosso di figura può essere rimosso)



## Dimostrazione (VI)

2) Ogni cammino in  $H$  ha al più 2 spigoli



Difatti, se esiste un cammino con 3 spigoli, posso rimuovere sempre un arco in modo da avere un edge-cover, contraddicendo il fatto che  $C$  è minimo

### Osservazione

Dalle proprietà 1) e 2) deduco che  $H$  è un grafo costituito da  $n$  vertici,  $\rho(G)$  spigoli, decomponibile in  $N$  componenti connesse aventi la forma di "stella"

## Dimostrazione (VII)

Consideriamo la componente  $i$ -esima di  $H$   
In generale, essa avrà  $s_i$  nodi e  $s_i - 1$  archi

Quindi

$$\sum_{1 \leq i \leq N} s_i = n$$

$$\sum_{1 \leq i \leq N} (s_i - 1) = \sum_{1 \leq i \leq N} s_i - N = \rho(G).$$

Allora  $N = n - \rho(G)$ .

Sia  $A$  un **abbinamento** con uno spigolo per ogni componente di  $H$ .

Si ha

$$\mu(G) \geq |A| = n - \rho(G)$$

che con  $\rho(G) \leq n - \mu(G)$  fornisce la tesi.

# Formulazioni di PLI: Massimo Stabile

Dati

$$G(V, E), |V|=n, |E|=m$$

Variabili decisionali

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } i \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Formulazione

$$\max \sum_{i=1}^n x_i$$

st

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n$$

# Rilassamento Lineare

$$\max \sum_{i=1}^n x_i$$

st

$$x_i + x_j \leq 1 \quad \forall (i, j) \in E$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$\text{STAB}_{\text{RL}}$

Osservazione:

La limitazione  $x_i \leq 1$  può essere omessa

Indichiamo con  $\alpha_{\text{RL}}(G)$  il valore della soluzione ottima del rilassamento lineare

# Formulazioni di PLI: Minimo edge-cover

Variabili decisionali

$$y_e \begin{cases} 1 & \text{se l' arco } e \in C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Formulazione

$$\min \sum_{e \in E} y_e$$

st

$$\sum_{e \in \partial(i)} y_e \geq 1 \quad \forall i \in V$$

$$y_e \in \{0,1\}, \quad e = 1, \dots, m$$

# Rilassamento lineare

$$\min \sum_{e \in E} y_e$$

st

$$\sum_{e \in \partial(i)} y_e \geq 1 \quad \forall i \in V$$

$$y_e \geq 0, \quad e = 1, \dots, m$$

EDGE-C<sub>RL</sub>

Osservazione:

La limitazione  $y_e \leq 1$  può essere omessa

Indichiamo con  $\rho_{\text{RL}}(G)$  il valore della soluzione ottima del rilassamento lineare

# Dualità

Osservazione:

$\text{STAB}_{\text{RL}}$  e  $\text{EDGE-C}_{\text{RL}}$  costituiscono una coppia primale-duale

Inoltre:

$$\alpha(G) \leq \alpha_{\text{RL}}(G)$$

$$\rho_{\text{RL}}(G) \leq \rho(G)$$

Allora:

$$\alpha(G) \leq \alpha_{\text{RL}}(G) = \rho_{\text{RL}}(G) \leq \rho(G)$$

# Formulazioni di PLI: Massimo Matching

Variabili decisionali

$$y_e \begin{cases} 1 & \text{se l' arco } e \in A \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Formulazione

$$\max \sum_{e \in E} y_e$$

st

$$\sum_{e \in \partial(i)} y_e \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_e \in \{0, 1\}, \quad e = 1, \dots, m$$

# Rilassamento Lineare

$$\max \sum_{e \in E} y_e$$

st

MATCHING<sub>RL</sub>

$$\sum_{e \in \partial(i)} y_e \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$y_e \geq 0, \quad e = 1, \dots, m$$

Osservazione:

La limitazione  $y_e \leq 1$  può essere omessa

Indichiamo con  $\mu_{\text{RL}}(\mathcal{G})$  il valore della soluzione ottima del rilassamento lineare

# Formulazioni di PLI: minimo trasversale

Variabili decisionali

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{se il vertice } i \in T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Formulazione

$$\min \sum_{i=1}^n x_i$$

st

$$x_i + x_j \geq 1 \quad \forall (i, j) \in E$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, n$$

# Rilassamento lineare

$$\min \sum_{i=1}^n x_i$$

st

$$x_i + x_j \geq 1 \quad \forall (i, j) \in E$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

TRASV<sub>RL</sub>

Osservazione:

La limitazione  $x_i \leq 1$  può essere omessa

Indichiamo con  $\tau_{\text{RL}}(G)$  il valore della soluzione ottima del rilassamento lineare

# Dualità

Osservazione:

$\text{MATCHING}_{\text{RL}}$  e  $\text{TRASV}_{\text{RL}}$  costituiscono una coppia primale-duale

Inoltre:

$$\mu(G) \leq \mu_{\text{RL}}(G)$$

$$\tau_{\text{RL}}(G) \leq \tau(G)$$

Allora:

$$\mu(G) \leq \mu_{\text{RL}}(G) = \tau_{\text{RL}}(G) \leq \tau(G)$$