

# Insiemi indipendenti e coperture

(I Teoremi di Berge, König e Gallai)

# Sommario

- Formulazioni ed esempi
- Insiemi indipendenti in un grafo
  - Insieme stabile
  - Abbinamento
- Coperture in un grafo
  - Insieme trasversale
  - Edge-cover
- Diseguaglianze duali deboli
- Il Teorema di König
- Il Teorema di Berge
- Il Teorema di Gallai
  
- L'algoritmo ungherese

# Il ballo

## Problema 1. Il ballo (Berge)

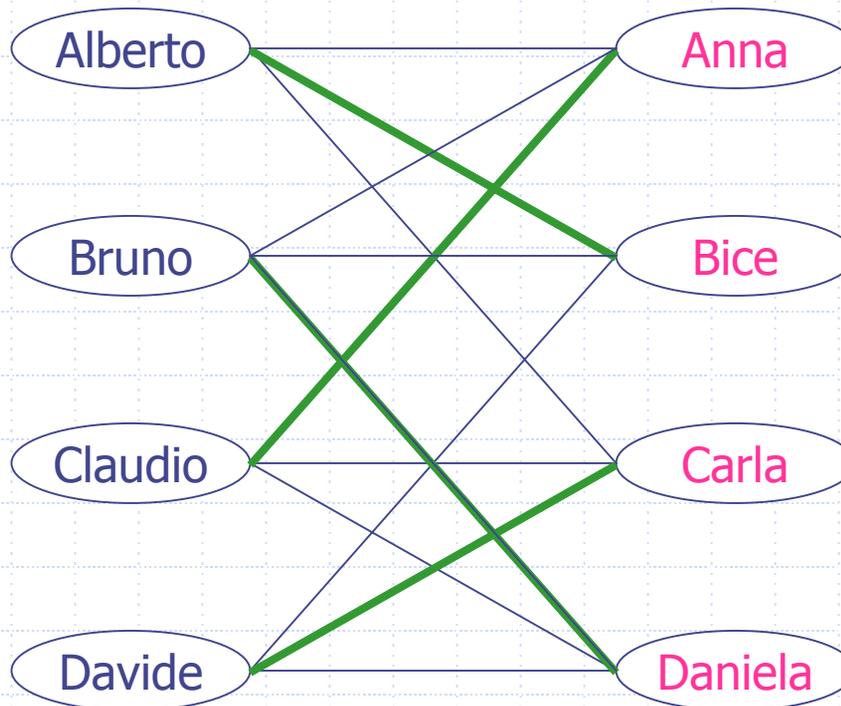
- In una festa sono presenti  $n$  ragazzi e  $n$  ragazze.
- Ogni ragazzo scopre che sono presenti  $k$  sue fidanzate, ogni ragazza scopre che sono presenti  $k$  suoi fidanzati ( $k \leq n, k \geq 1$ )

## Domanda

E' possibile far ballare ciascun ragazzo con una delle sue fidanzate e ciascuna ragazza con uno dei suoi fidanzati?

# Formulazione

Il ballo. 4 ragazzi/e con 3 fidanzati/e



# Le torri

## Problema 2. Le torri

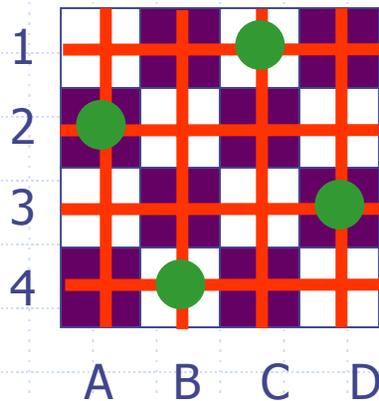
- Consideriamo una scacchiera  $n \times n$ .
- Due torri si “danno scacco” se giacciono sulla stessa riga (colonna) della scacchiera.

## Domanda

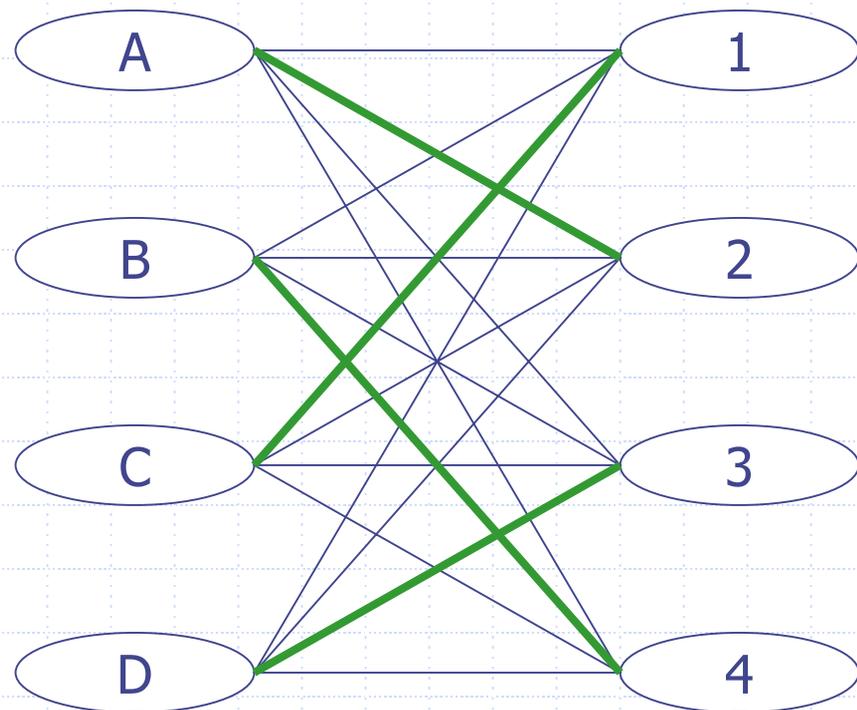
Qual è il massimo numero di torri che è possibile disporre sulla scacchiera senza esse si diano scacco reciproco?

# Formulazione

Due torri si danno scacco se si trovano sulla medesima riga o colonna:



Grafo intersezione  
righe-colonne



# La battaglia d'Inghilterra (1941)

## Problema 3. La battaglia d'Inghilterra (Berge)

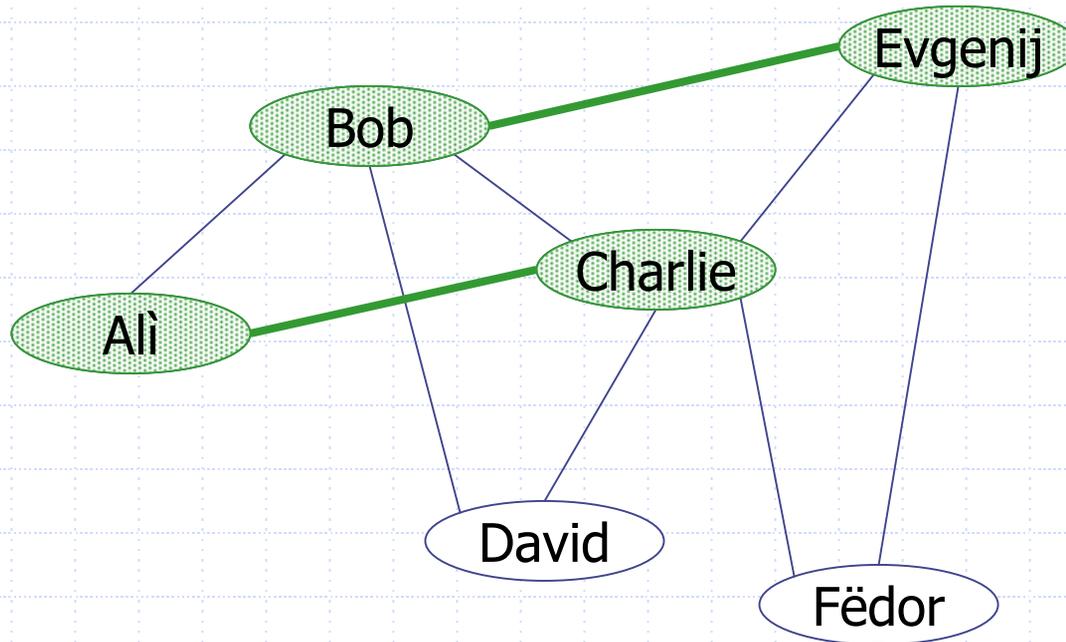
- Nel 1941 le squadriglie inglesi erano composte da aerei biposto, ma certi piloti non potevano formare una coppia per problemi di lingua o di abitudini.

## Domanda

Dati i vincoli di incompatibilità tra coppie di piloti, qual è il massimo numero di aerei che è possibile far volare simultaneamente?

# Formulazione

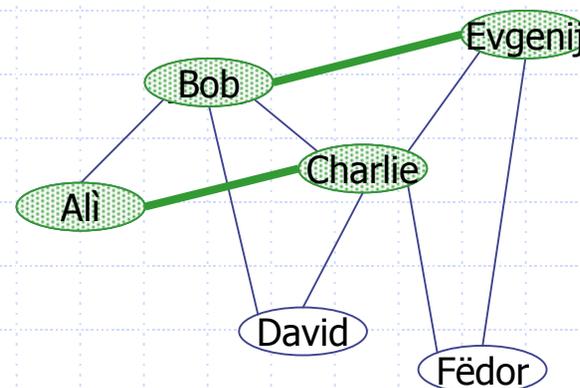
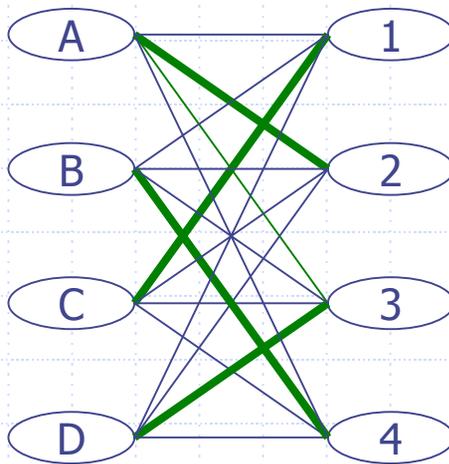
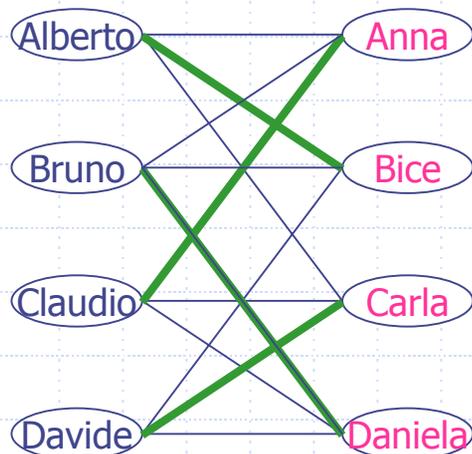
Disegniamo il *grafo di compatibilità* dei piloti.



# Abbinamento

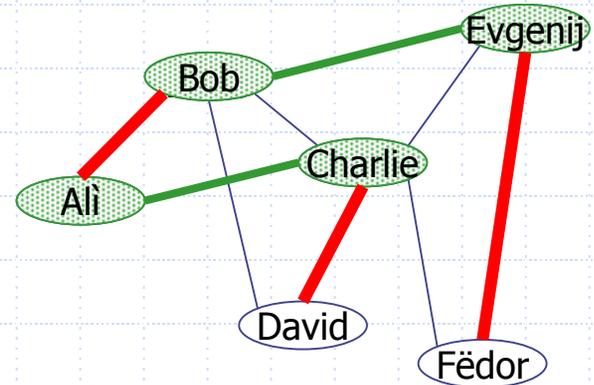
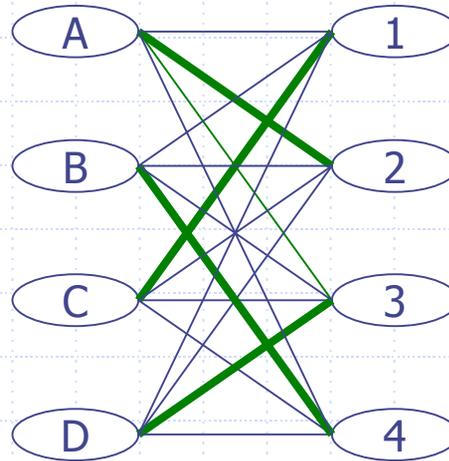
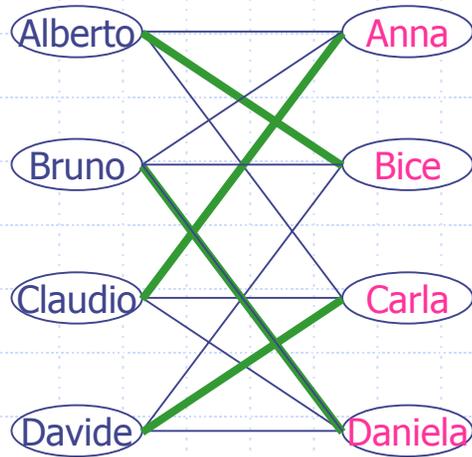
In ognuno dei casi esaminati, la soluzione può rappresentarsi come un insieme  $A$  di spigoli di un grafo  $G = (V, E)$  a due a due non adiacenti

Tale insieme è detto **abbinamento (matching)**



# Tipi di abbinamento

- Se  $|A| \geq |B|$  per ogni abbinamento  $B$  di  $G$ , allora  $A$  si dice **massimo**. La sua cardinalità si indica con  $\mu(G)$
- Se  $G$  è bipartito, anche  $A$  si dice **bipartito**
- Se  $|A| = |V|/2$ , allora  $A$  si dice **perfetto**



# Insieme indipendente

## Definizione:

Dato un grafo simmetrico  $G = (V, E)$ , si dice **indipendente** un qualunque sottoinsieme  $S$  di vertici ( $A$  di spigoli) costituito da elementi a due a due non adiacenti.

- L'insieme  $S$  è detto **stabile** (stable set).
- L'insieme  $A$  è detto **abbinamento** (matching).

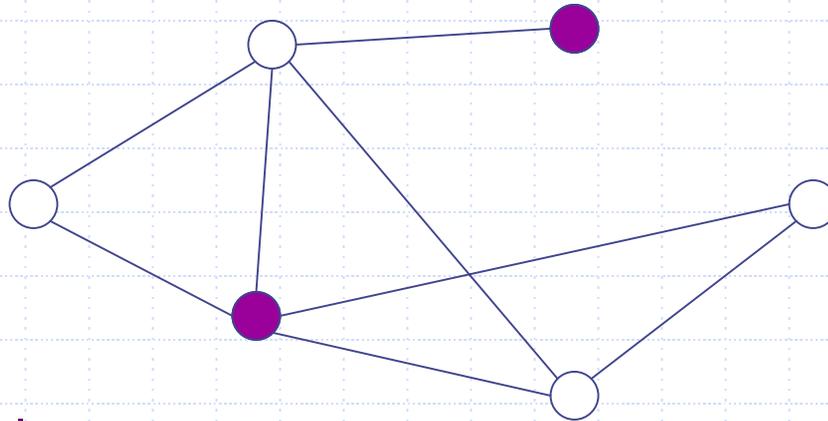
## Definizione:

Un insieme indipendente  $X$  si dice **massimale** se ogni elemento di  $V - X$  (di  $E - X$ ) risulta adiacente ad almeno un elemento di  $X$ .

Un insieme indipendente  $X^*$  si dice **massimo** se  $|X^*| \geq |X|$  per ogni insieme indipendente di  $G$ .

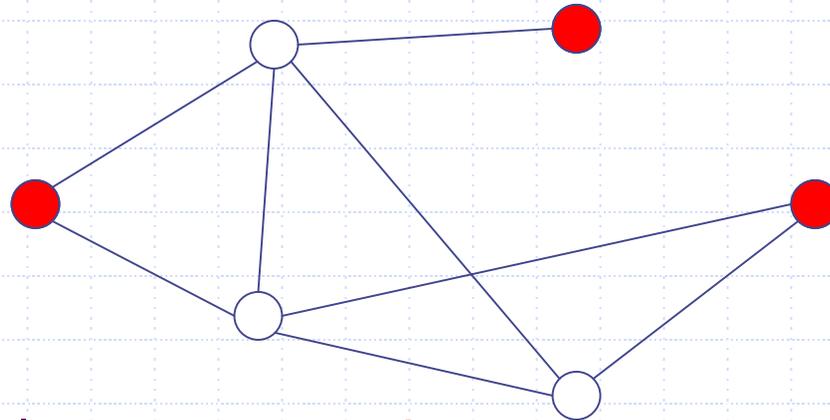
# Esempi

Osservazione:  $\emptyset$  è indipendente

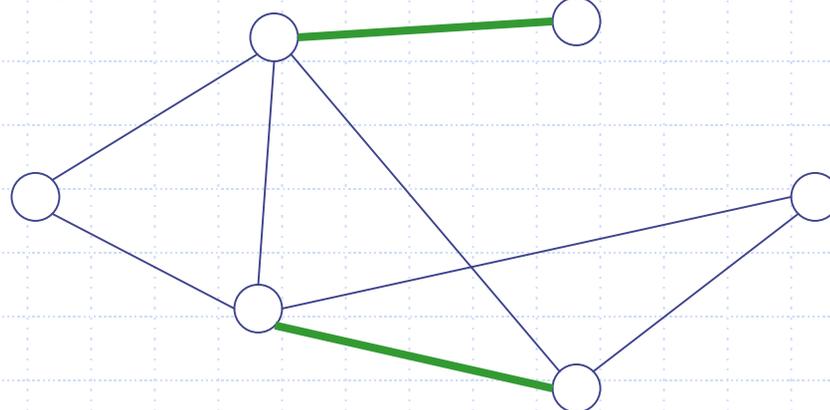


stabile massimale

# Esempi

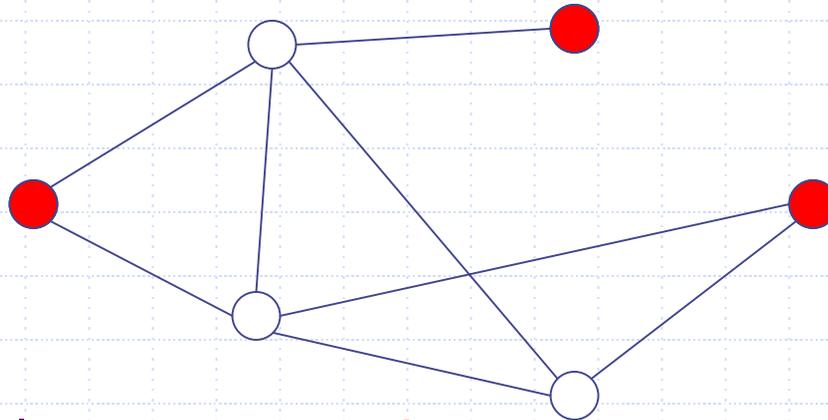


stabile massimale, ma non **massimo**

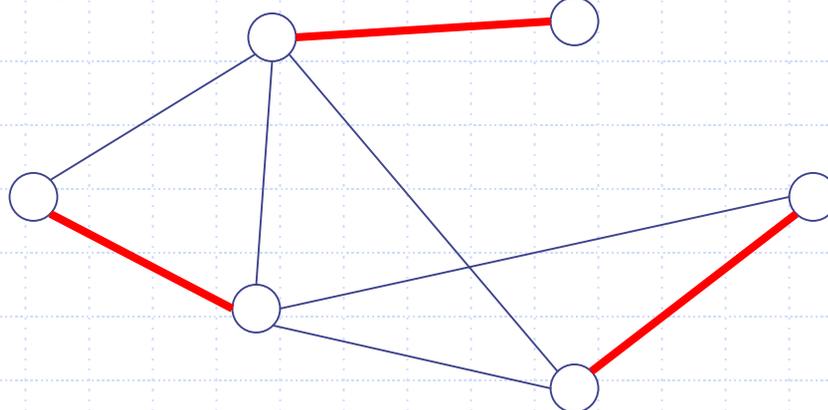


**abbinamento massimale**

# Esempi



stabile massimale, ma non massimo



abbinamento massimale, ma non massimo

# Copertura

## Definizione:

Dato un grafo simmetrico  $G = (V, E)$ , diremo **copertura** un qualunque sottoinsieme  $T$  di vertici ( $F$  di spigoli) tale che ogni spigolo di  $E$  (vertice di  $V$ ) incide su almeno un elemento di  $T$  (di  $F$ ).

- L'insieme  $T$  è detto **trasversale** (**vertex-cover**).
- L'insieme  $F$  è detto **edge-cover**.

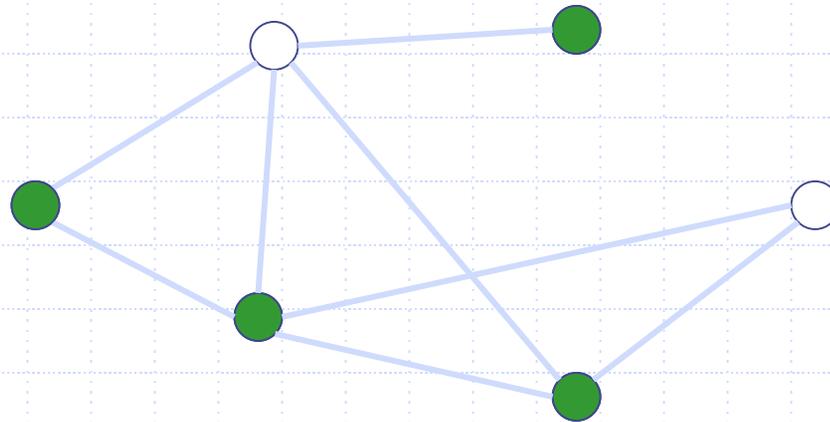
## Definizione:

Una copertura  $X$  si dice **minimale** se  $X - \{x\}$  non è una copertura, per ogni  $x \in X$ .

Una copertura  $X^*$  si dice **minima** se  $|X^*| \leq |X|$  per ogni copertura di  $G$ .

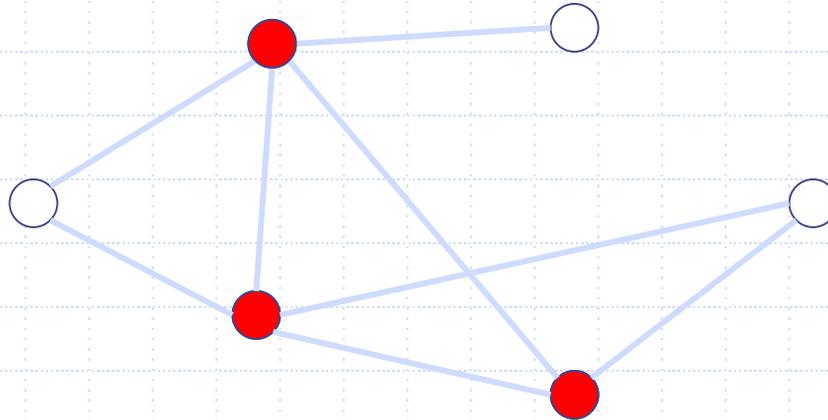
# Esempi

Osservazione:  $V$  e  $E$  sono rispettivamente trasversale e edge-cover

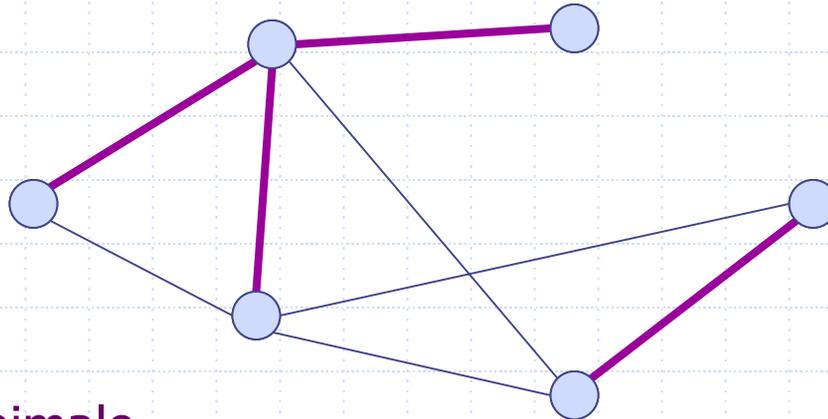


trasversale minimale

# Esempi

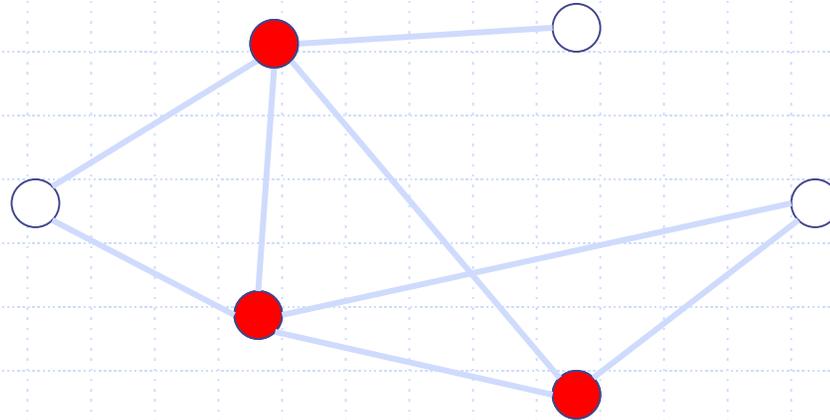


trasversale minimale, ma non **minimo**

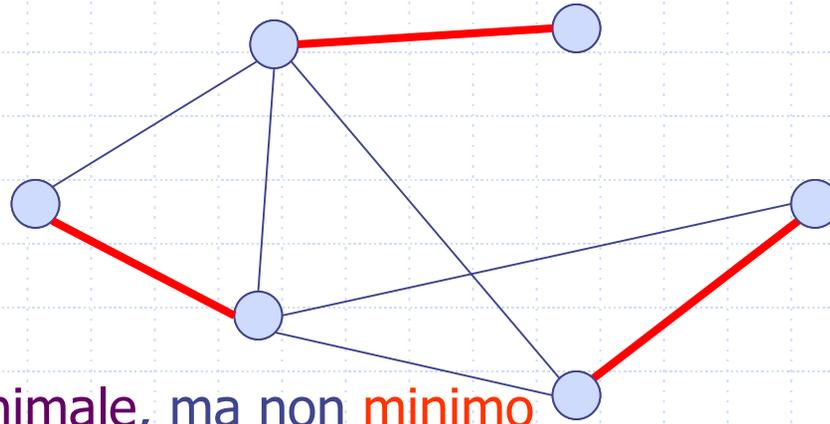


edge-cover minimale

# Esempi



trasversale minimale, ma non **minimo**



edge-cover minimale, ma non **minimo**

## Diseguaglianze duali deboli

D'ora in avanti indicheremo la cardinalità di:

- un **insieme stabile massimo** di  $G$  con il simbolo  $\alpha(G)$
- un **abbinamento massimo** di  $G$  con il simbolo  $\mu(G)$
- uno **edge-cover minimo** di  $G$  con il simbolo  $\rho(G)$
- un **insieme trasversale minimo** di  $G$  con il simbolo  $\tau(G)$ .

Teorema Per ogni grafo  $G$  valgono le seguenti disequaglianze:

$$\begin{array}{ccc} \alpha(G) & \leq & \rho(G) \\ \mu(G) & \leq & \tau(G) \end{array}$$

(disequaglianze duali deboli).

# Diseguaglianze duali deboli

## Dimostrazione

Siano rispettivamente  $X \subseteq V$ ,  $Y \subseteq E$  un insieme indipendente e una copertura di  $G$ .

Poiché  $Y$  copre  $V$ , ogni elemento  $x$  di  $X$  incide su almeno un elemento  $y$  di  $Y$ .

D'altronde nessun  $y \in Y$  copre contemporaneamente due elementi di  $X$ , altrimenti questi sarebbero adiacenti, e dunque  $X$  non sarebbe indipendente.

Quindi esiste un distinto  $y \in Y$  per ogni  $x \in X$ , e di conseguenza

$$|X| \leq |Y|$$

Riscrivendo questa relazione per  $X^*$  e  $Y^*$  si ottiene

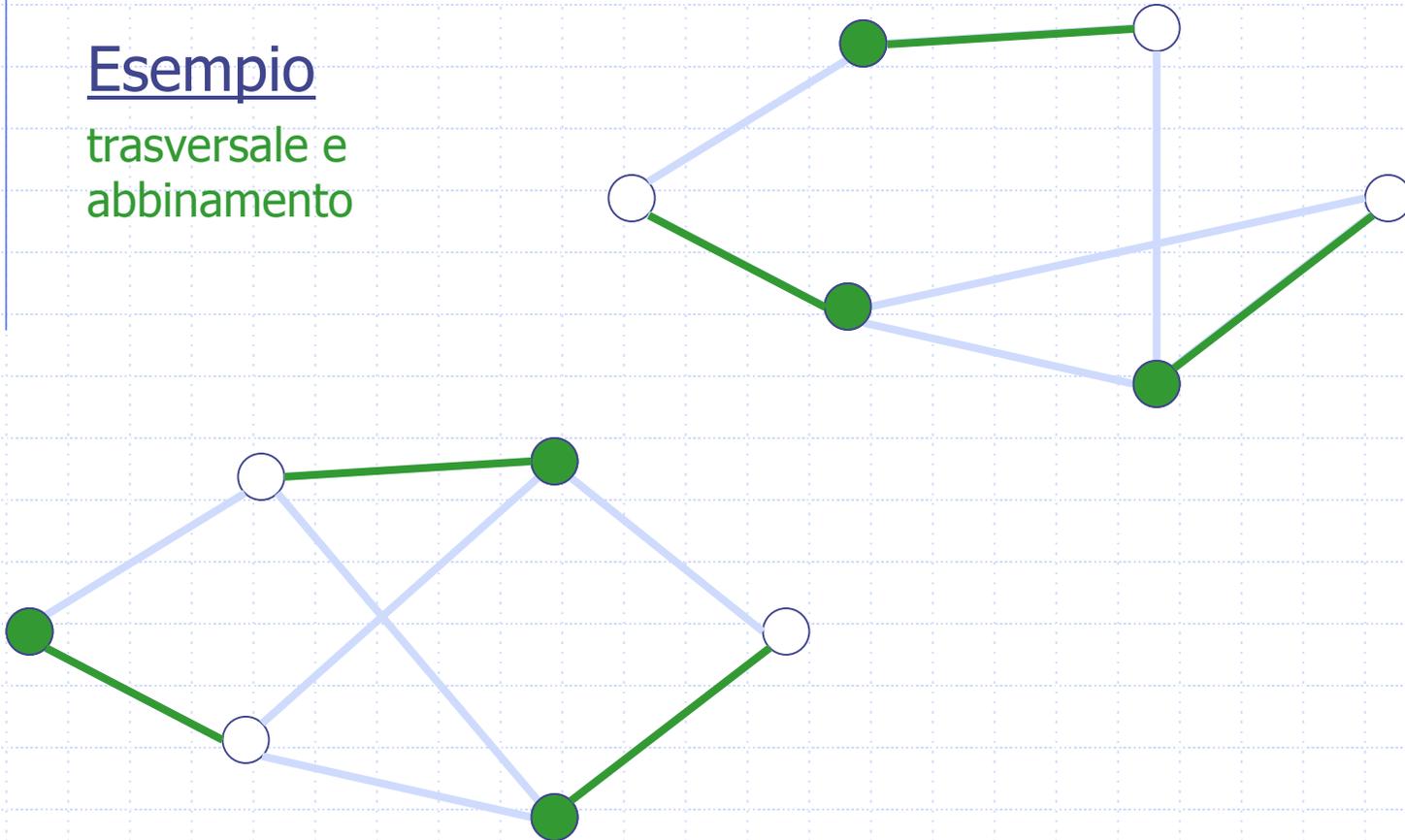
$$\alpha(G) \leq \rho(G)$$

Scambiando poi il ruolo di  $V$  ed  $E$  si ottiene

$$\mu(G) \leq \tau(G)$$

# Diseguaglianze duali deboli

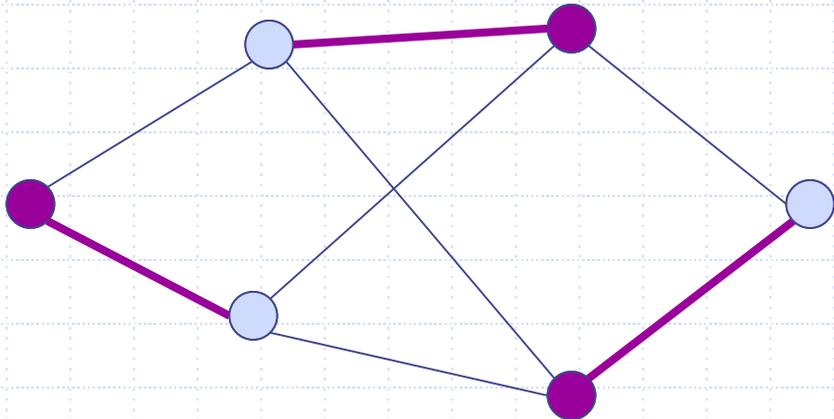
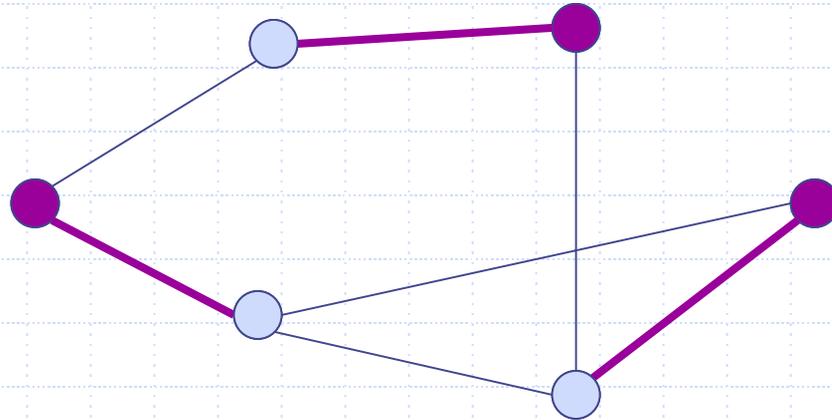
Esempio  
trasversale e  
abbinamento



# Diseguaglianze duali deboli

## Esempio

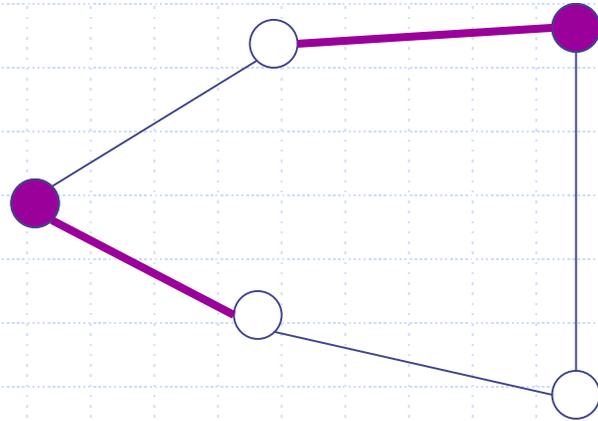
stabile ed  
edge-cover



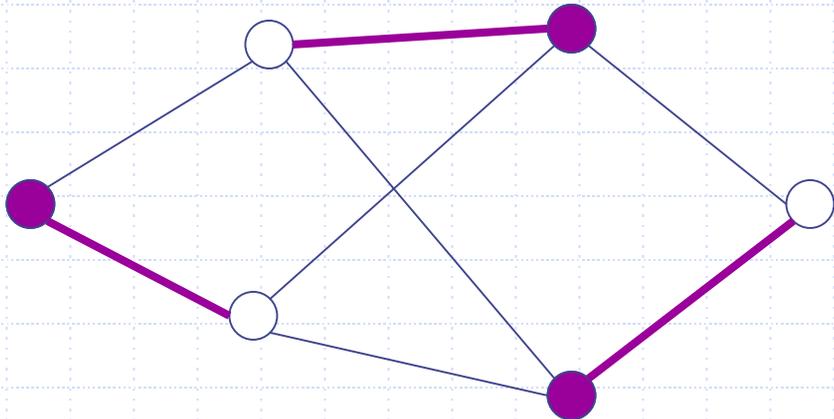
Forse valgono sempre  
con il segno "=" ?

# Diseguaglianze duali deboli

Esempio



**NO!!!**



Forse valgono sempre  
con il segno "=" ?