

Insiemi indipendenti e coperture

(I Teoremi di Berge, König e Gallai)

Sommario

- Formulazioni ed esempi
- Insiemi indipendenti in un grafo
 - Insieme stabile
 - Abbinamento
- Coperture in un grafo
 - Insieme trasversale
 - Edge-cover
- Diseguaglianze duali deboli
- Il Teorema di König
- Il Teorema di Berge
- Il Teorema di Gallai
- L'algoritmo ungherese

Il ballo

Problema 1. Il ballo (Berge)

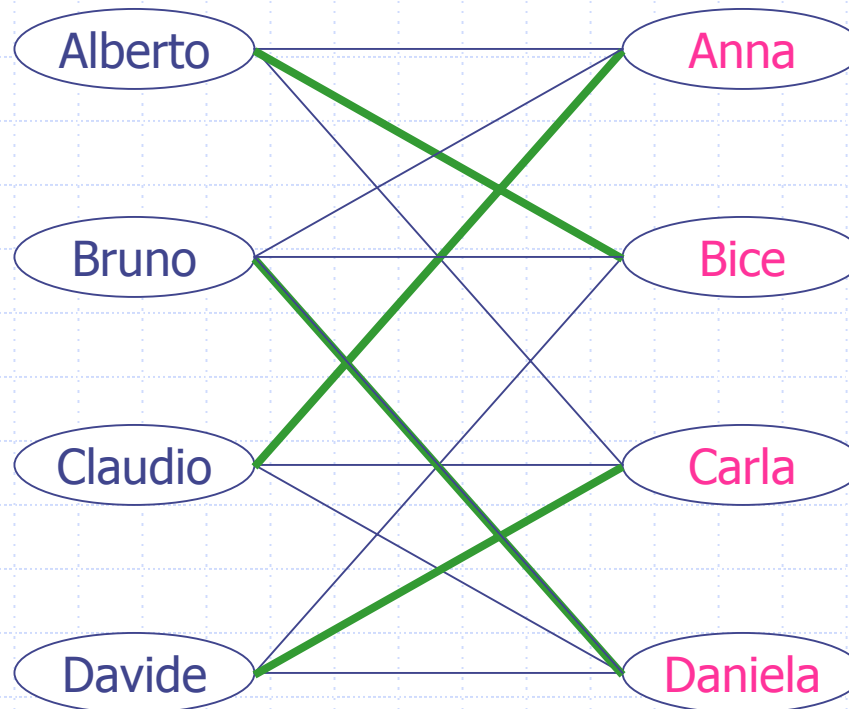
- In una festa sono presenti n ragazzi e n ragazze.
- Ogni ragazzo scopre che sono presenti k sue fidanzate, ogni ragazza scopre che sono presenti k suoi fidanzati ($k \leq n$, $k \geq 1$)

Domanda

E' possibile far ballare ciascun ragazzo con una delle sue fidanzate e ciascuna ragazza con uno dei suoi fidanzati?

Formulazione

Il ballo. 4 ragazzi/e con 3 fidanzati/e



Le torri

Problema 2. Le torri

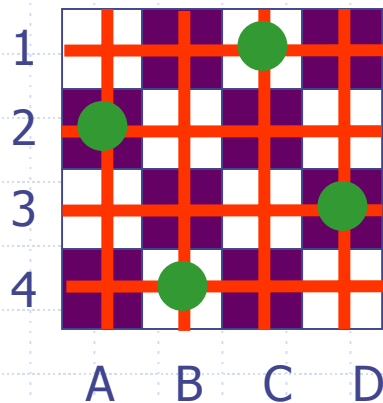
- Consideriamo una scacchiera $n \times n$.
- Due torri si “danno scacco” se giacciono sulla stessa riga (colonna) della scacchiera.

Domanda

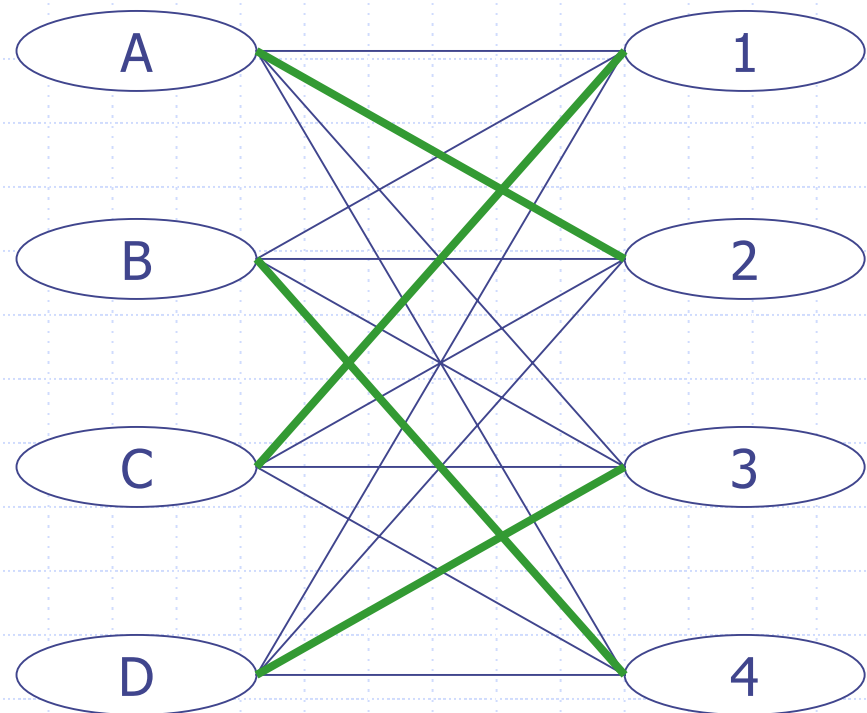
Qual è il massimo numero di torri che è possibile disporre sulla scacchiera senza esse si diano scacco reciproco?

Formulazione

Due torri si danno scacco se si trovano sulla medesima riga o colonna:



Grafo intersezione
righe-colonne



La battaglia d'Inghilterra (1941)

Problema 3. La battaglia d'Inghilterra (Berge)

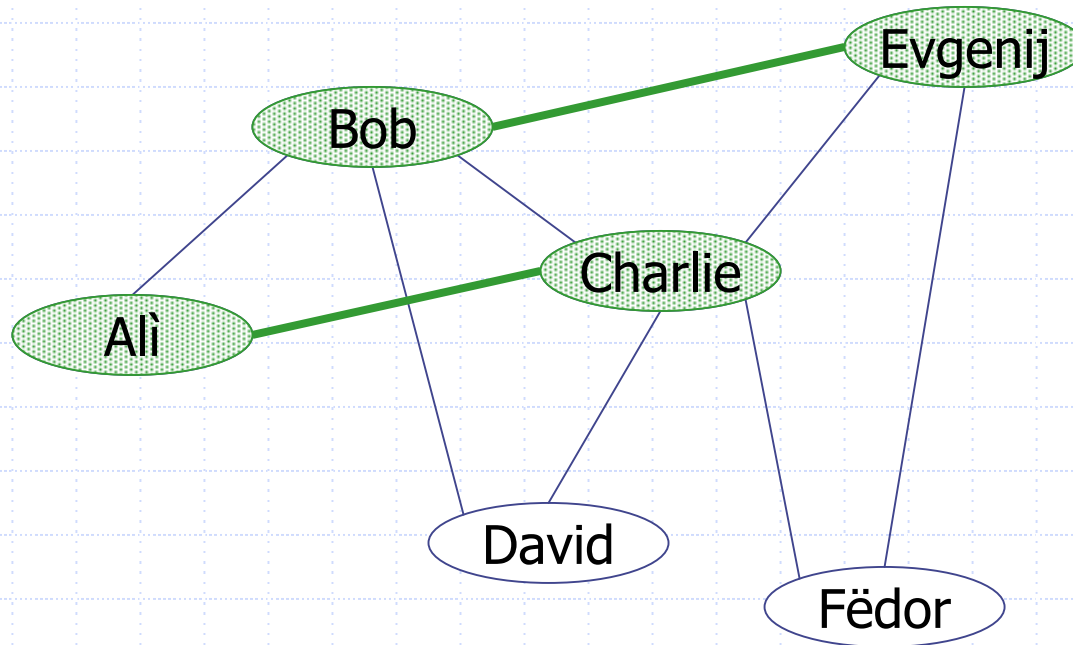
- Nel 1941 le squadriglie inglesi erano composte da aerei biposto, ma certi piloti non potevano formare una coppia per problemi di lingua o di abitudini.

Domanda

Dati i vincoli di incompatibilità tra coppie di piloti, qual è il massimo numero di aerei che è possibile far volare simultaneamente?

Formulazione

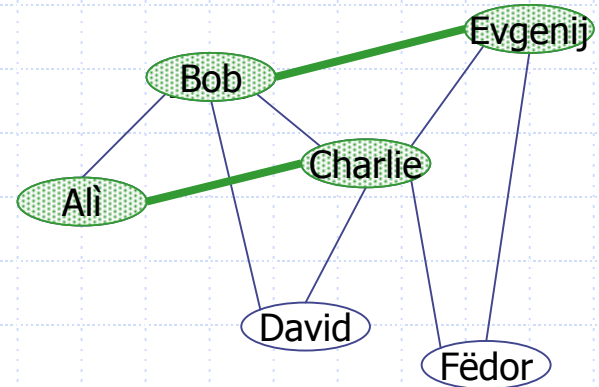
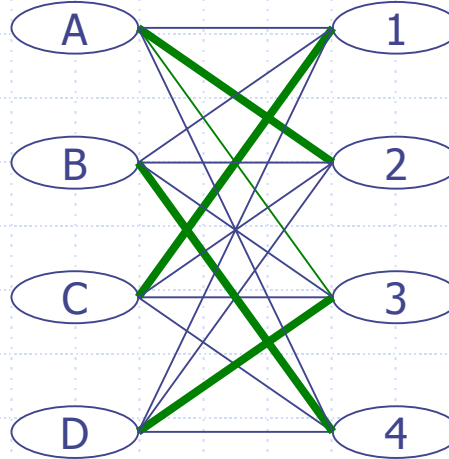
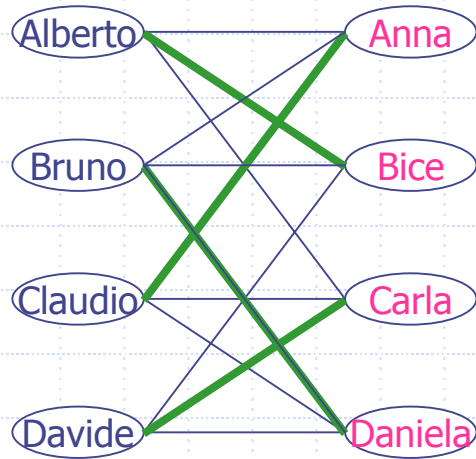
Disegniamo il *grafo di compatibilità* dei piloti.



Abbinamento

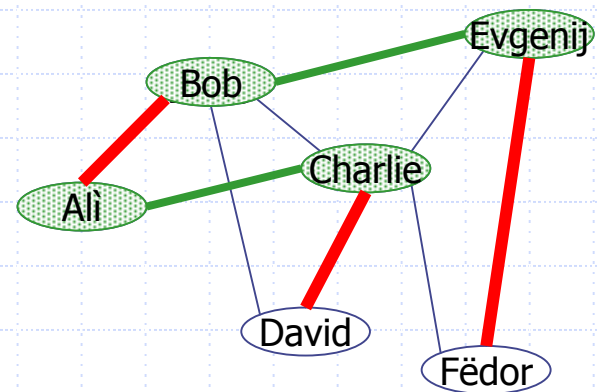
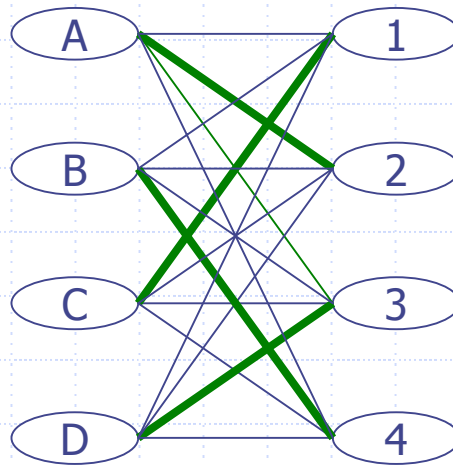
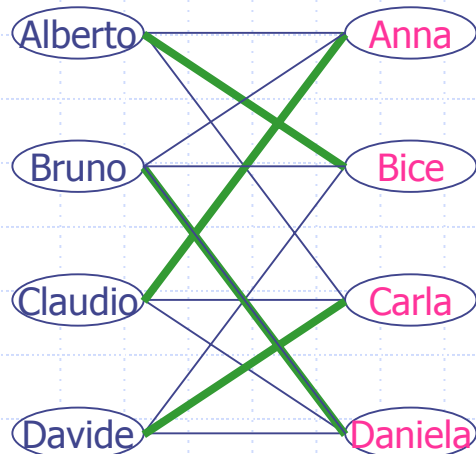
In ognuno dei casi esaminati, la soluzione può rappresentarsi come un insieme A di spigoli di un grafo $G = (V, E)$ a due a due non adiacenti

Tale insieme è detto **abbinamento** (matching)



Tipi di abbinamento

- Se $|A| \geq |B|$ per ogni abbinamento B di G , allora A si dice **massimo**. La sua cardinalità si indica con $\mu(G)$
- Se G è bipartito, anche A si dice **bipartito**
- Se $|A| = |V|/2$, allora A si dice **perfetto**



Insieme indipendente

Definizione:

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, si dice **indipendente** un qualunque sottoinsieme S di vertici (A di spigoli) costituito da elementi a due a due non adiacenti.

- L'insieme S è detto **stabile** (stable set).
- L'insieme A è detto **abbinamento** (matching).

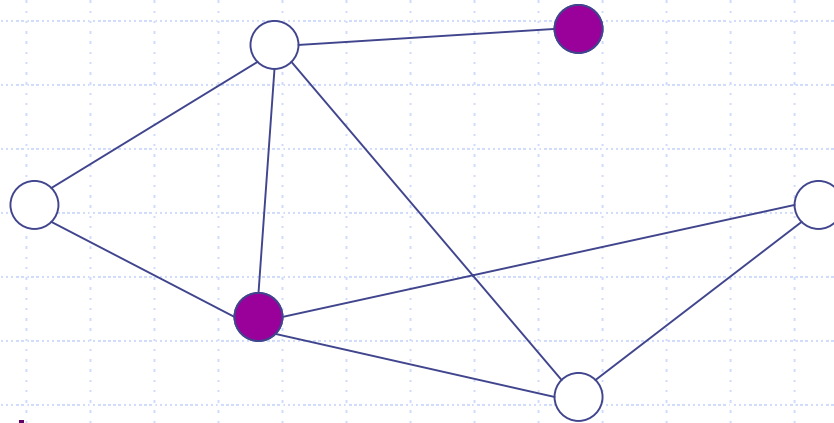
Definizione:

Un insieme indipendente X si dice **massimale** se ogni elemento di $V - X$ (di $E - X$) risulta adiacente ad almeno un elemento di X .

Un insieme indipendente X^* si dice **massimo** se $|X^*| \geq |X|$ per ogni insieme indipendente di G .

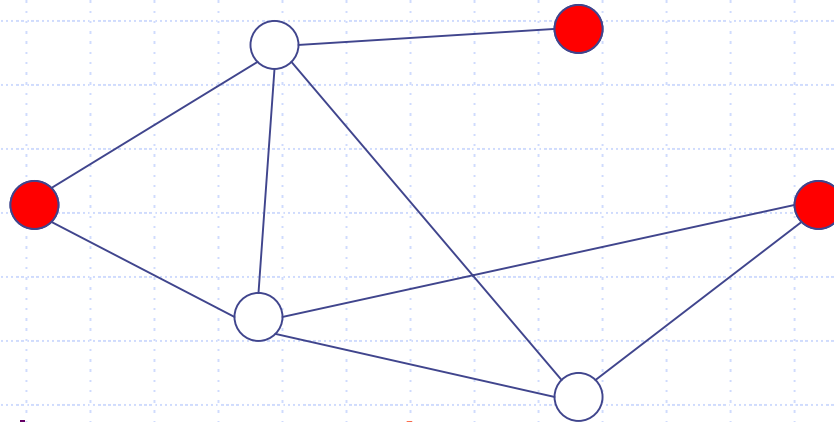
Esempi

Osservazione: \emptyset è indipendente

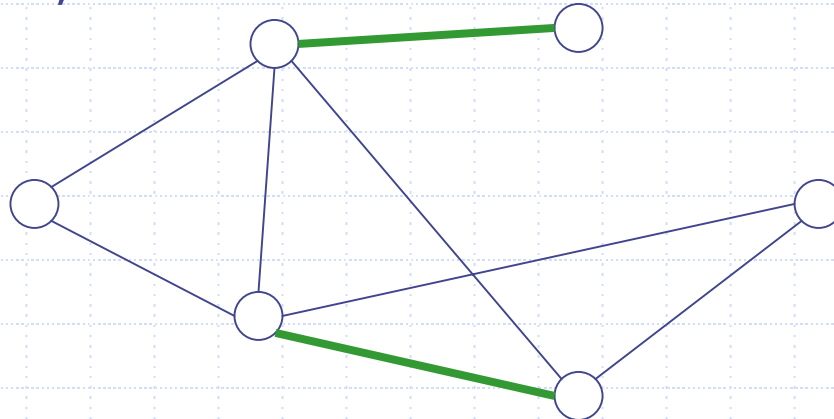


stabile massimale

Esempi

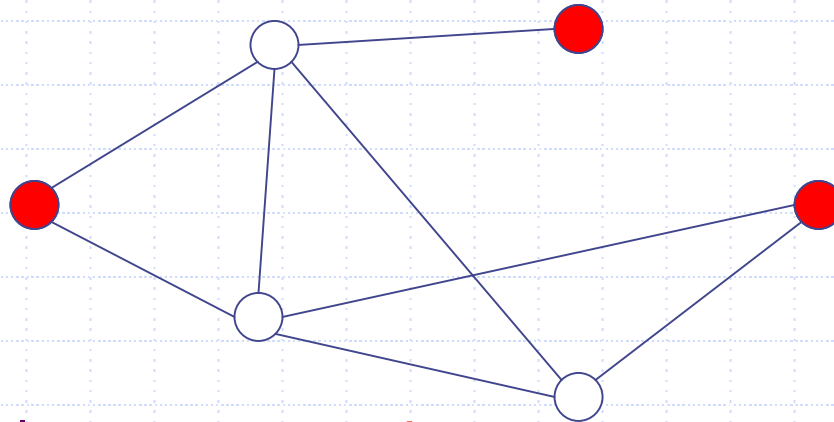


stabile massimale, ma non massimo

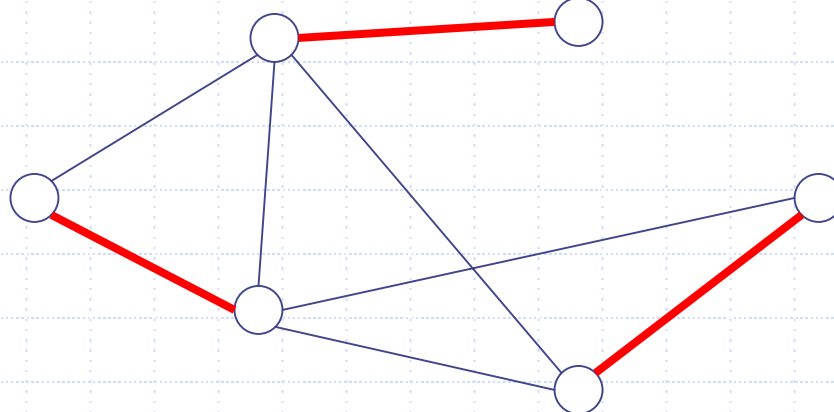


abbinamento massimale

Esempi



stabile massimale, ma non massimo



abbinamento massimale, ma non massimo

Copertura

Definizione:

Dato un grafo simmetrico $G = (V, E)$, diremo **copertura** un qualunque sottoinsieme T di vertici (F di spigoli) tale che ogni spigolo di E (vertice di V) incide su almeno un elemento di T (di F).

- L'insieme T è detto **trasversale** (**vertex-cover**).
- L'insieme F è detto **edge-cover**.

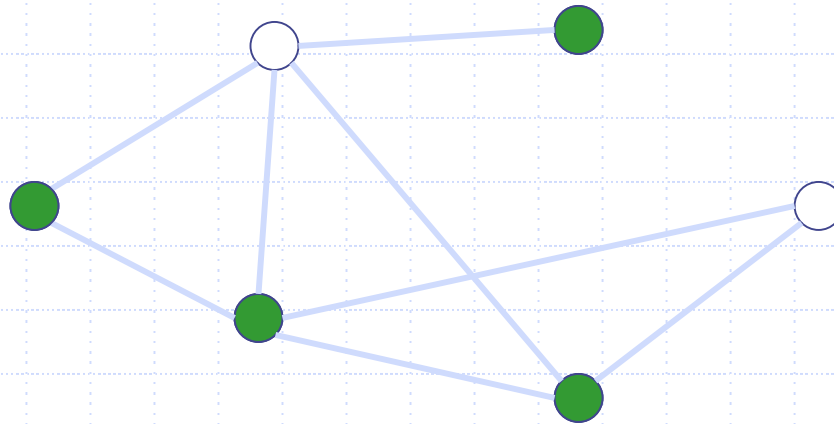
Definizione:

Una copertura X si dice **minimale** se $X - \{x\}$ non è una copertura, per ogni $x \in X$.

Una copertura X^* si dice **minima** se $|X^*| \leq |X|$ per ogni copertura di G .

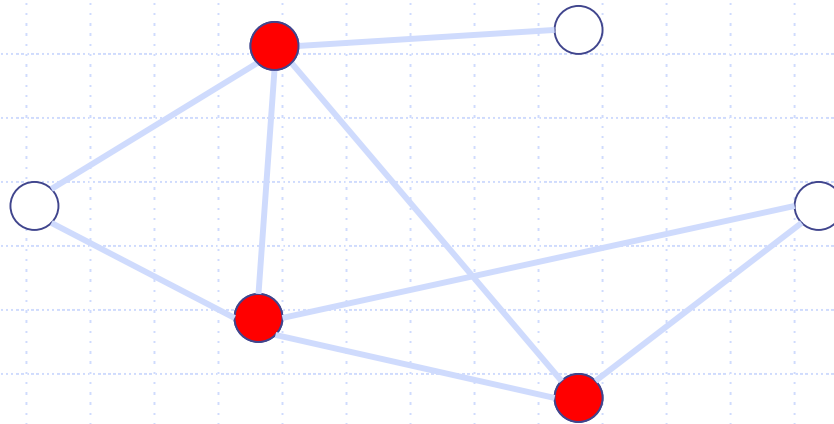
Esempi

Osservazione: V e E sono rispettivamente trasversale e edge-cover

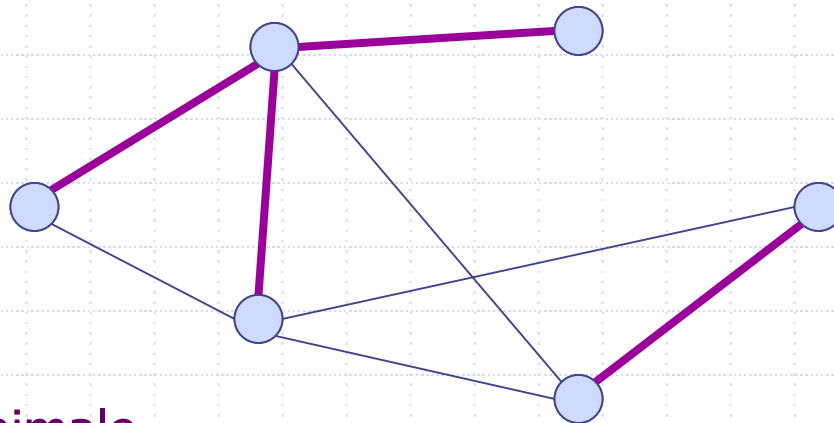


trasversale minimale

Esempi

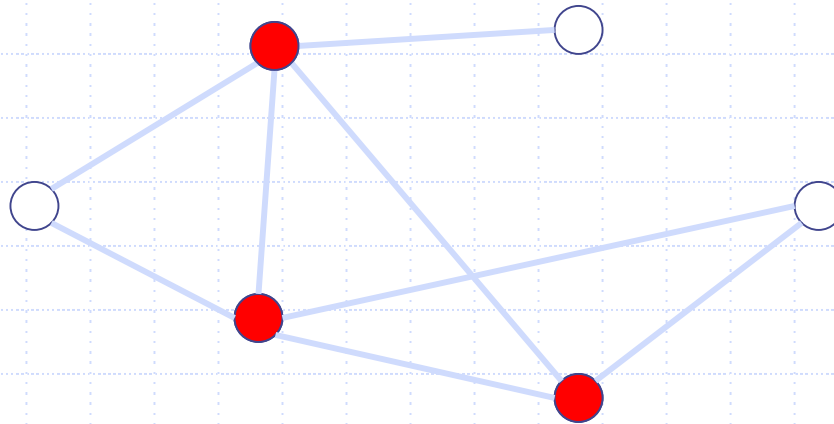


trasversale minimale, ma non minimo

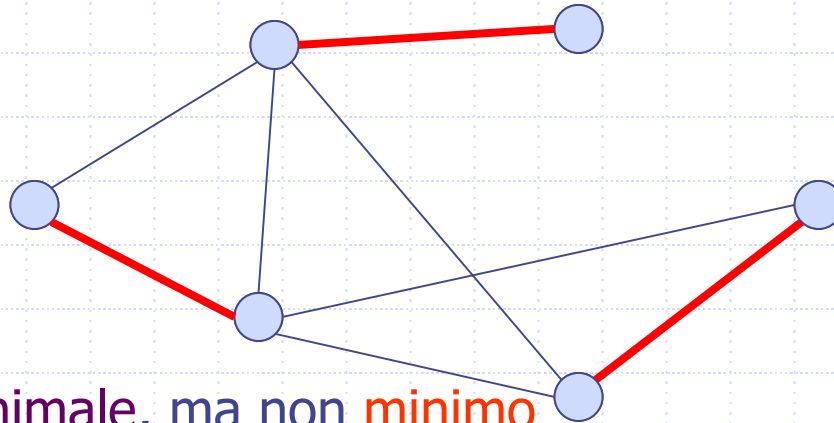


edge-cover minimale

Esempi



trasversale minimale, ma non minimo



edge-cover minimale, ma non minimo

Diseguaglianze duali deboli

D'ora in avanti indicheremo la cardinalità di:

- un **insieme stabile massimo** di G con il simbolo $\alpha(G)$
- un **abbinamento massimo** di G con il simbolo $\mu(G)$
- uno **edge-cover minimo** di G con il simbolo $\rho(G)$
- un **insieme trasversale minimo** di G con il simbolo $\tau(G)$.

Teorema Per ogni grafo G valgono le seguenti disequaglianze:

$$\begin{array}{ccc} \alpha(G) & \leq & \rho(G) \\ \mu(G) & \leq & \tau(G) \end{array}$$

(diseguaglianze duali deboli).

Diseguaglianze duali deboli

Dimostrazione

Siano rispettivamente $X \subseteq V$, $Y \subseteq E$ un insieme indipendente e una copertura di G .

Poiché Y copre V , ogni elemento x di X incide su almeno un elemento y di Y .

D'altronde nessun $y \in Y$ copre contemporaneamente due elementi di X , altrimenti questi sarebbero adiacenti, e dunque X non sarebbe indipendente.

Quindi esiste un distinto $y \in Y$ per ogni $x \in X$, e di conseguenza

$$|X| \leq |Y|$$

Riscrivendo questa relazione per X^* e Y^* si ottiene

$$\alpha(G) \leq \rho(G)$$

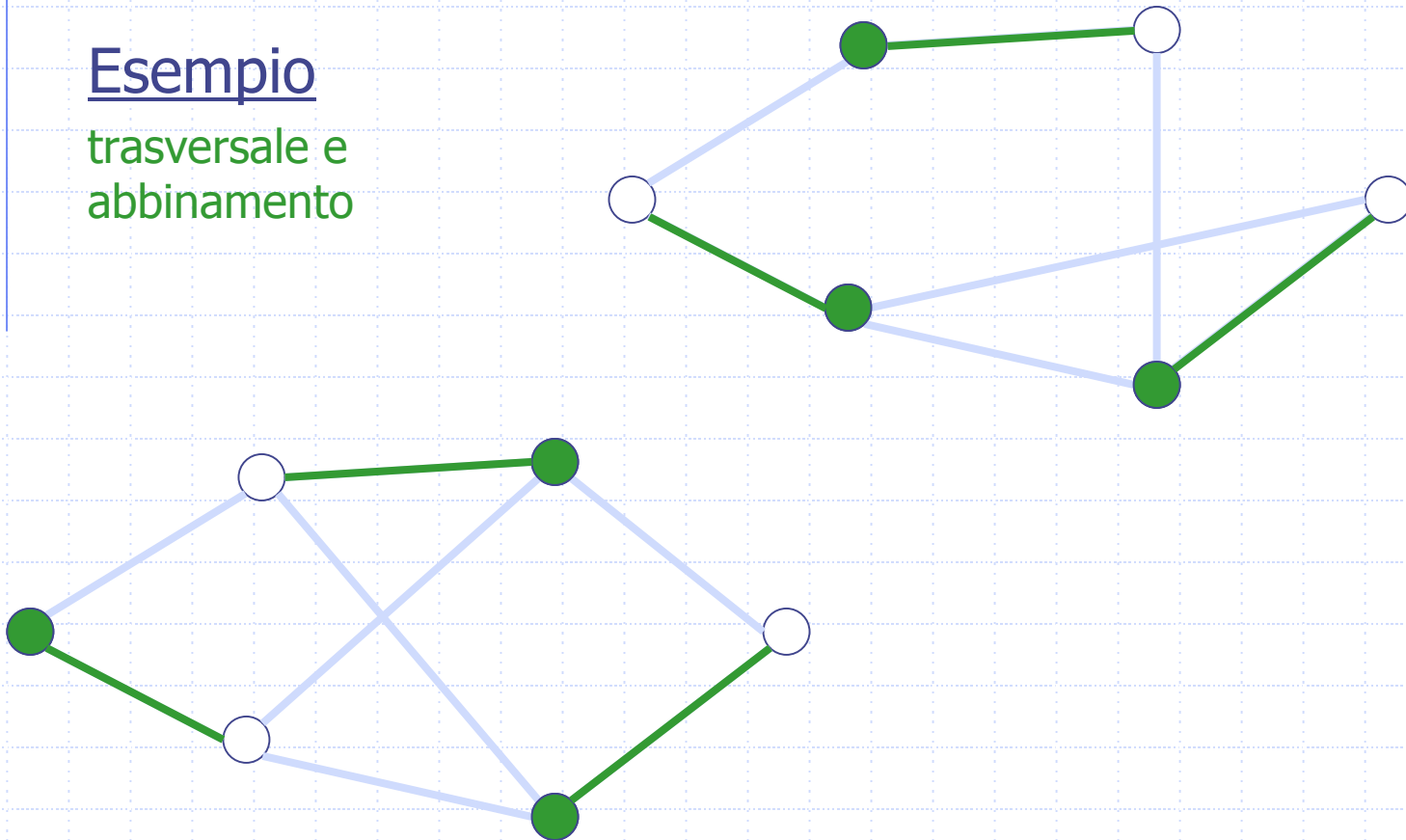
Scambiando poi il ruolo di V ed E si ottiene

$$\mu(G) \leq \tau(G)$$

Diseguaglianze duali deboli

Esempio

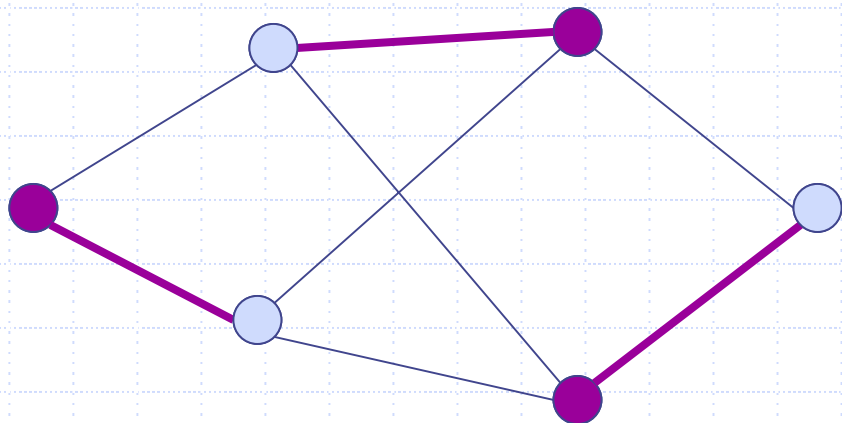
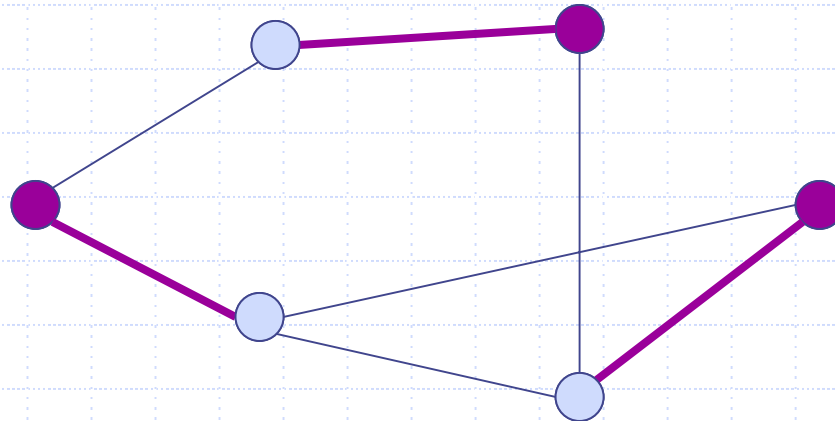
trasversale e
abbinamento



Diseguaglianze duali deboli

Esempio

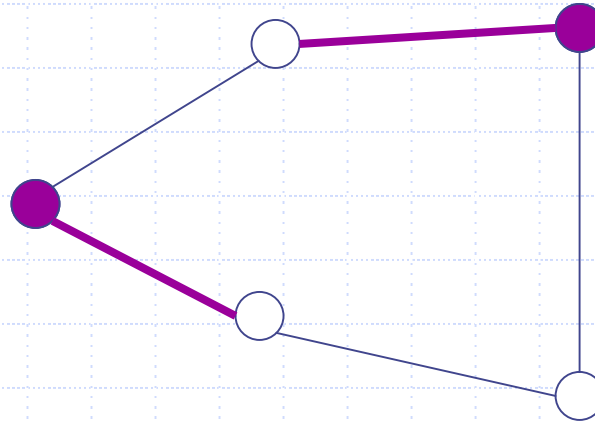
stabile ed
edge-cover



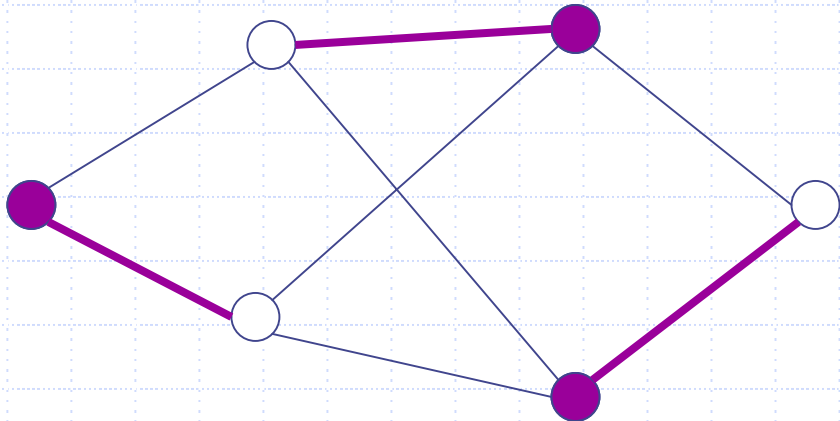
Forse valgono sempre
con il segno "=" ?

Diseguaglianze duali deboli

Esempio



NO!!!



Forse valgono sempre
con il segno "=" ?