Ottimizzazione Combinatoria
A. A. 2003-2004

Docente

Fabrizio Rossi

Orario di ricevimento

mercoledi 15-17 oppure su appuntamento

Telefono 0862433139 e-mail rossi@di.univaq.it

Sito web

http://www.di.univaq.it/~oil

Orario delle lezioni

martedi ore 17.00 – 19.00 aula 1.6

mercoledi ore 17.00 – 19.00 aula 1.6

giovedi ore 11.30 – 13.30 aula 1.6

Testi di riferimento

Base

A. Sassano, Modelli e Algoritmi della Ricerca Operativa, Franco Angeli

Avanzati

L. A. Wolsey, Integer Programming, John Wiley & Sons, Inc.

W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, A. Schrijver, Combinatorial Optimization, Wiley

Materiale didattico sul sito http://www.di.univaq.it/~oil

Applicazioni

- Progetto di servizi logistici
- Progetto di una rete di trasmissione radiotelevisiva
- Gestione del servizio di trasporto urbano per handicappati
- Pianificazione della produzione
- Gestione delle partenze e degli arrivi in un aeroporto

Progetto di servizi logistici

L'azienda di spedizioni Ex-press, proprietaria di alcuni treni merci, intende realizzare un servizio di spedizioni tra L'Aquila e Pescara via ferrovia

Pertanto:

1. Chiede gli orari disponibili alla società che gestisce la rete ferroviaria (*Rete Ferroviaria Italiana*) e i costi relativi
2. Configura il servizio che massimizza il guadagno

Il gestore della rete

1. Studia la fattibilità delle richieste della società
2. Pianifica alcuni orari alternativi
3. Definisce i prezzi di ogni alternativa

Ex-press ha un problema di ottimizzazione

- Ex-press

Dati

Un insieme di orari O, ognuno con il proprio costo

Un insieme di treni T, ognuno con il proprio "profitto"

Problema

Assegnare un sottoinsieme $T' \subseteq T$ di treni a un sottoinsieme di orari $O' \subseteq O$ in modo da massimizzare il guadagno (somma dei profitti – somma dei costi) e rispettando i vincoli "fisici"

RFI ha un problema di ottimizzazione

- RFI

  Dati

  L'orario di nuovo treno

  L'intervallo di tempo necessario a percorrere ogni tratta della linea

  L'intervallo di tempo minimo e massimo di sosta in ogni stazione

  Standard di sicurezza (due treni che viaggiano sulla stessa linea devono essere separati da almeno k metri, ecc.)

  L'orario esistente

  Problema

  Trovare (se esiste !) un orario che contenga il nuovo treno e che rispetti gli standard di sicurezza

Problema di Ottimizzazione

- E insieme *ambiente* (insieme di soluzioni, decisioni o alternative)
- $F \subseteq E$ insieme *ammissibile*
- F è definito tramite un insieme di relazioni dette *vincoli*
- $f : E \rightarrow \Re$ *funzione obiettivo*
- Direzione di ottimizzazione: minimo o massimo

Problema di ottimizzazione (min)

Trovare un elemento $x \in F$ tale che $f(x) \leq f(y)$ $\forall\ y \in F$.

$v = f(x)$ *valore ottimo*

x *soluzione ottima*

Problema di Ottimizzazione Combinatoria

Dati

N insieme finito $N = \{1, 2, \ldots, n\}$

$\boldsymbol{c}$ vettore di pesi c_j per ogni $j \in N$

Insieme ambiente

U = {tutti i possibili $2^{|N|}$ sottoinsiemi di N}

Insieme ammissibile

famiglia $\Im$ di sottoinsiemi F di U

Si definisce

Problema di Ottimizzazione Combinatoria

$$min_{\ S \subseteq N} \{\textstyle\sum_{j \in S} c_j : S \in \Im\}$$

La definizione è analoga se si vuole massimizzare la f.o.

Il problema dell'assegnamento

3 Artigiani 3 Lavori da realizzare

Tabella dei costi

A \ L	**1**	**2**	**3**
1	10	12	20
2	7	15	18
3	14	10	9

Problema

Assegnare esattamente un lavoro ad ogni artigiano in modo da minimizzare i costi

Il problema dell'assegnamento

Insiemi ammissibili

1. $\{a_1 - l_1, a_2 - l_2, a_3 - l_3\}$ di costo 34
2. $\{a_1 - l_2, a_2 - l_3, a_3 - l_1\}$ di costo 44
3. $\{a_1 - l_3, a_2 - l_1, a_3 - l_2\}$ di costo 37
4. $\{a_1 - l_3, a_2 - l_2, a_3 - l_1\}$ di costo 49
5. $\{a_1 - l_2, a_2 - l_1, a_3 - l_3\}$ di costo 28
6. $\{a_1 - l_1, a_2 - l_3, a_3 - l_2\}$ di costo 38

A \ L	**1**	**2**	**3**
1	10	12	20
2	7	15	18
3	14	10	9

La soluzione ottima ha valore 28

I possibili assegnamenti sono $n!$, pertanto il numero di insiemi ammissibili è $n!$

Il problema della bisaccia

Avete a disposizione un budget b per gli investimenti dell'anno 2002

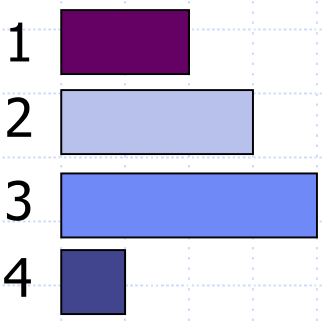
Ad ogni progetto è associato

- un costo $a_j (> 0)$
- un guadagno atteso $c_j (>0)$

Problema

Scegliere l'insieme di progetti in modo che sia massimizzato il guadagno atteso senza eccedere il budget b

Il problema della bisaccia



a	c
2	10
3	14
4	12
1	8

Dimensione della bisaccia

$b = 5$

Insiemi ammissibili

$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3,4\}$

Soluzione ottima

$\{1, 2\}$ di valore 24

Quanti sono gli insiemi ammissibili?

Il numero di possibili sottoinsiemi di un insieme di n oggetti è 2^n.

Se $b = \Sigma_{j=1,\ldots,n}\, a_j / 2$ gli insiemi ammissibili sono almeno 2^{n-1}

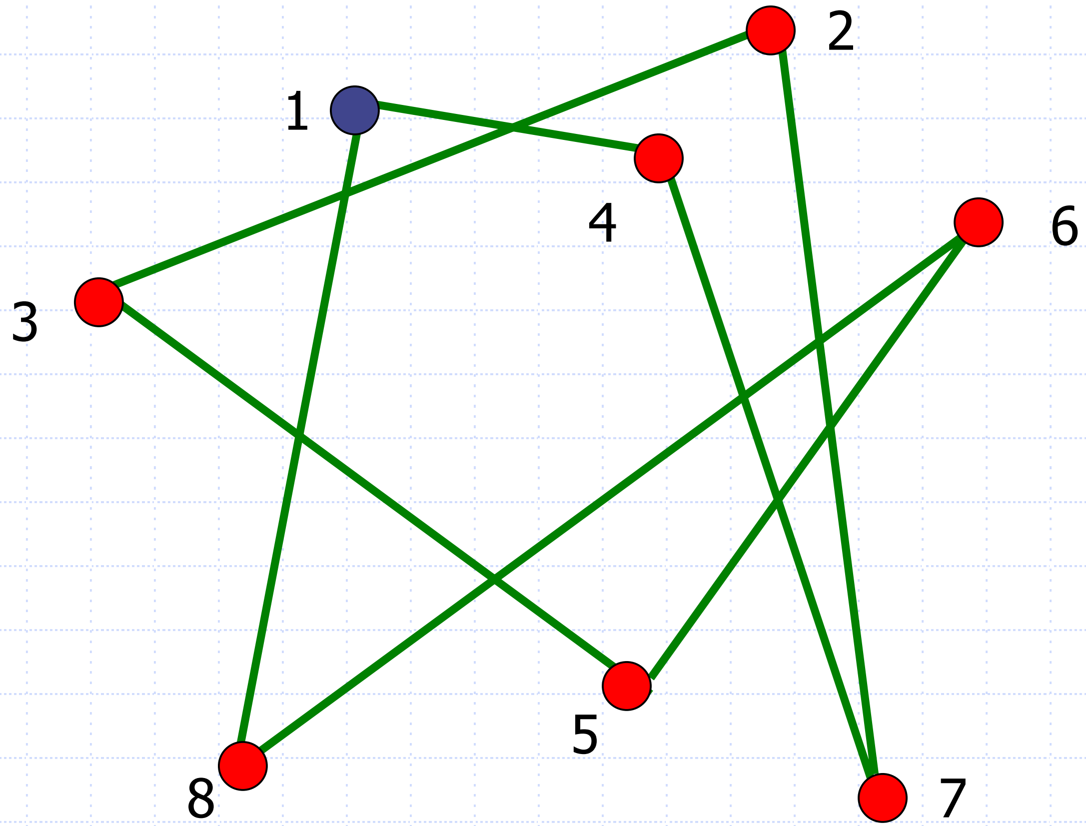
Il problema del commesso viaggiatore

n punti nel piano

Per ogni coppia di punti (i, j) si definisce un costo $c_{ij} > 0$

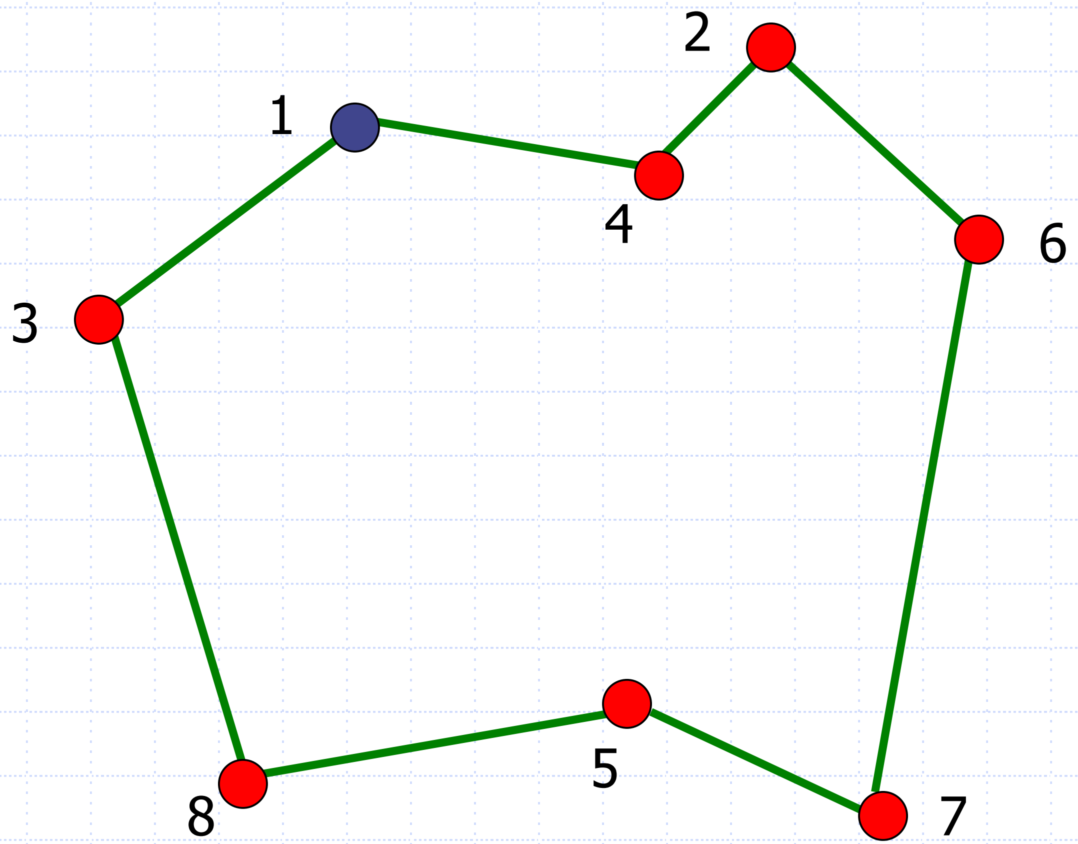
Problema

Trovare il "tour" di costo minimo



Il problema del commesso viaggiatore

Insiemi ammissibili: gli (n-1)! possibili tour



Differenze e similarità

Proprietà fondamentali dei problemi di OC:

1. tutti i problemi di OC sono definiti su insiemi ammissibili finiti e numerabili
2. la funzione obiettivo è calcolabile in corrispondenza ad ogni insieme ammissibile

Quindi

esiste un algoritmo “universale” per i problemi di OC che si chiama ENUMERAZIONE TOTALE

Conclusione:

È inutile seguire questo corso

È vera quest'affermazione?

n	$\log n$	$n^{0.5}$	n^2	2^n	$n!$
10	3.32	3.16	100	1.02×10^{3}	3.6×10^{6}
100	6.64	10.00	10000	1.27×10^{30}	9.33×10^{157}
1000	9.97	31.62	1000000	1.07×10^{301}	4.02×10^{2567}

Le operazioni eseguite da un moderno calcolatore (1 Ghz) in un anno sono pari a 3.15×10^{16}

Pertanto, per risolvere un problema di TSP con 20 città attraverso l'enumerazione totale si impiegano circa 4 anni

Obiettivo del corso

Studiare tecniche matematiche che consentono di progettare algoritmi "efficienti" per i problemi di OC

Che cosa si intende per algoritmo efficiente?

1. Algoritmi ammissibili a complessità polinomiale [Assegnamento]
2. Algoritmi ammissibili a complessità pseudo polinomiali [Knapsack]
3. Algoritmi ammissibili a complessità non polinomiale [TSP]
4. Algoritmi approssimati a complessità polinomiale [Knapsack]
5. Algoritmi euristici [Knapsack, TSP]

Obiettivo del corso

Modellare problemi decisionali derivanti da applicazioni del mondo industriale come problemi di ottimizzazione