

Modelli per la gestione delle scorte

Claudio Arbib

Università di L'Aquila

Prima Parte: gestione periodica



Sommario

1. Introduzione

Termini del problema

2. Costi di spedizione

3. Costi di giacenza

4. Gestione ordini periodica di singola risorsa (EOQ)

assorbimento costante

assorbimento variabile con regolarità

5. Limiti del modello EOQ

1. Introduzione

- La produzione di un bene materiale coinvolge generalmente quantità limitate di **risorse**
- Ciascuna risorsa costituisce di norma una **scorta**
 - in *ingresso*, ad alimentare la produzione per un certo periodo di tempo
 - in *uscita*, destinata alla distribuzione
- Gestire le scorte può comportare la risoluzione di **problemi decisionali**

Voci di costo

- trasporto
- giacenza
- lavoro

Decisioni

- quanto acquistare/produrre
- quando acquistare/produrre

Dati e vincoli

- parametri di processo
- domanda
- infrastruttura logistica

Termini del problema

- La produzione di un bene materiale coinvolge generalmente quantità limitate di risorse
- Ciascuna risorsa costituisce di norma una scorta
 - in *ingresso*, ad alimentare la produzione per un certo periodo di tempo
 - in *uscita*, destinata alla distribuzione
- Gestire le scorte può comportare la risoluzione di problemi decisionali

Esempio In un impianto si fa uso di due tipi di risorsa.

Siano $b_{11} = 100$ q.li

$b_{21} = 90$ q.li

le scorte delle risorse 1 e 2 disponibili il giorno 1

Parametri di processo:

Il processo **consuma**

$a_1 = 2$ q.li di risorsa 1

$a_2 = 3$ q.li di risorsa 2

per q.le di prodotto finito.

La **capacità di produzione** giornaliera è $q_{max} = 20$ q.li

Termini del problema

- Sia x_t la quantità prodotta il giorno t
- Si ha
$$\begin{aligned}x_1 &\leq b_{11}/a_1 = 50 \\x_1 &\leq b_{21}/a_2 = 30 \\0 &\leq x_1 \leq q_{max} = 20\end{aligned}$$
- La soluzione $x_1^* = 20$ sfrutta appieno la capacità di produzione del giorno 1
- All'inizio del giorno 2 le scorte valgono quindi
$$\begin{aligned}b_{12} &= b_{11} - a_1 x_1^* = 60 \\b_{22} &= b_{21} - a_2 x_1^* = 30\end{aligned}$$

Esempio In un impianto si fa uso di due tipi di risorsa.

Siano $b_{11} = 100$ q.li
 $b_{21} = 90$ q.li

le scorte delle risorse 1 e 2 disponibili il giorno 1

Parametri di processo:

Il processo consuma

$a_1 = 2$ q.li di risorsa 1

$a_2 = 3$ q.li di risorsa 2

per q.le di prodotto finito.

La capacità di produzione giornaliera è $q_{max} = 20$ q.li

Termini del problema

- Sia x_t la quantità prodotta il giorno t
- Si ha

$$\begin{aligned} x_1 &\leq b_{11}/a_1 = 50 \\ x_1 &\leq b_{21}/a_2 = 30 \\ 0 &\leq x_1 \leq q_{max} = 20 \end{aligned}$$
- La soluzione $x_1^* = 20$ sfrutta appieno la capacità di produzione del giorno 1
- All'inizio del giorno 2 le scorte valgono quindi

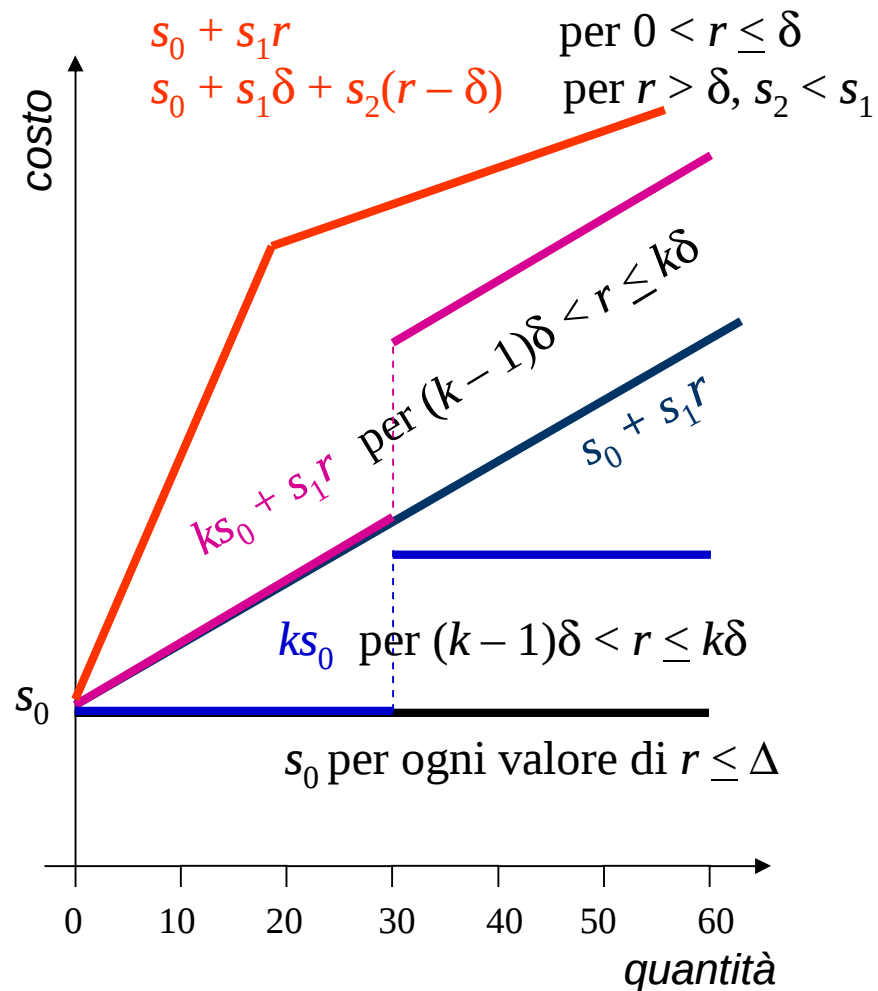
$$\begin{aligned} b_{12} &= b_{11} - a_1 x_1^* = 60 \\ b_{22} &= b_{21} - a_2 x_1^* = 30 \end{aligned}$$
- Ripetendo il procedimento si ottiene

$$\begin{aligned} x_2 &\leq b_{12}/a_1 = 30 \\ x_2 &\leq b_{22}/a_2 = 10 \\ 0 &\leq x_2 \leq q_{max} = 20 \end{aligned}$$
- La massima produzione vale $x_2^* = 10$ e non sfrutta la capacità di produzione del giorno 2
- Per mantenere la produzione a regime occorre rifornirsi di almeno $r = a_2 q_{max} - b_{22} = 30$ entro $t = 1$

2. Costi di spedizione Ù

- Riassumendo, siamo riusciti a circoscrivere le decisioni come segue:
 - quanto acquistare $r \geq 30$
 - quando acquistare $t \leq 1$
- Per precisarle ulteriormente dobbiamo esaminare le voci di costo
- Iniziamo dai costi di spedizione
- Il costo di spedizione è di norma formato da **due termini**:
- Un **costo fisso** s_0 , che va cioè pagato anche se si sposta un solo grammo di risorsa
- Un **costo variabile** non decrescente con il quantitativo r di risorsa ordinato, ad esempio

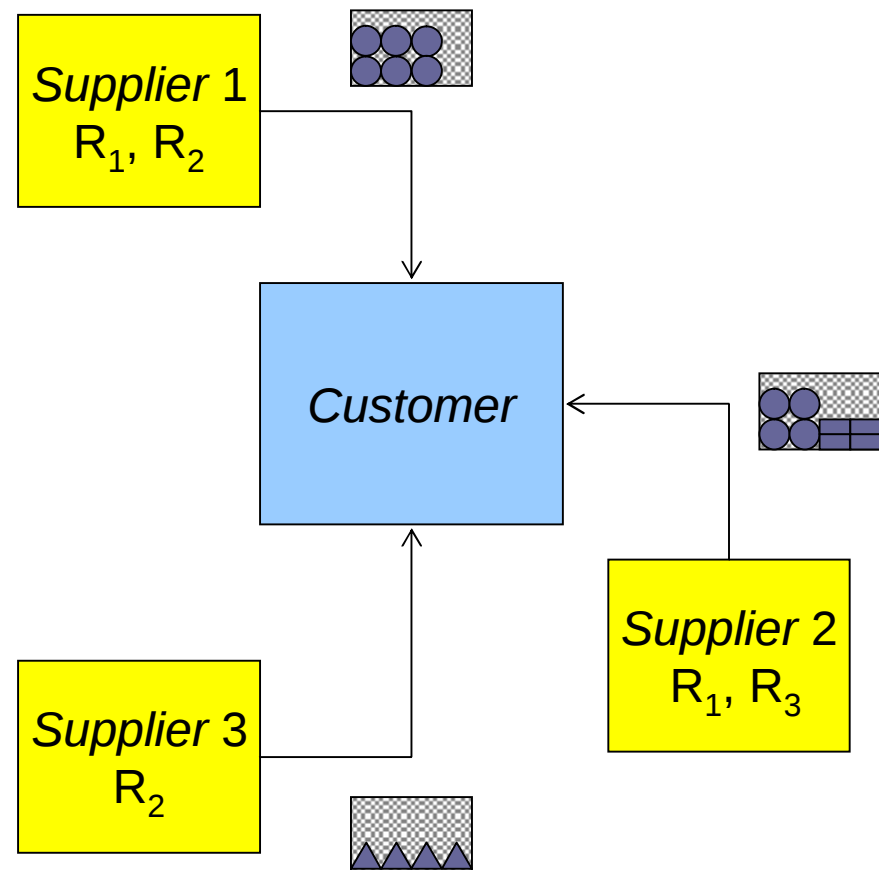
Costi di spedizione



- Il costo di spedizione è di norma formato da due termini:
- Un costo fisso s_0 , che va cioè pagato anche se si sposta un solo grammo di risorsa
- Un costo variabile non decrescente con il quantitativo r di risorsa ordinato, ad esempio

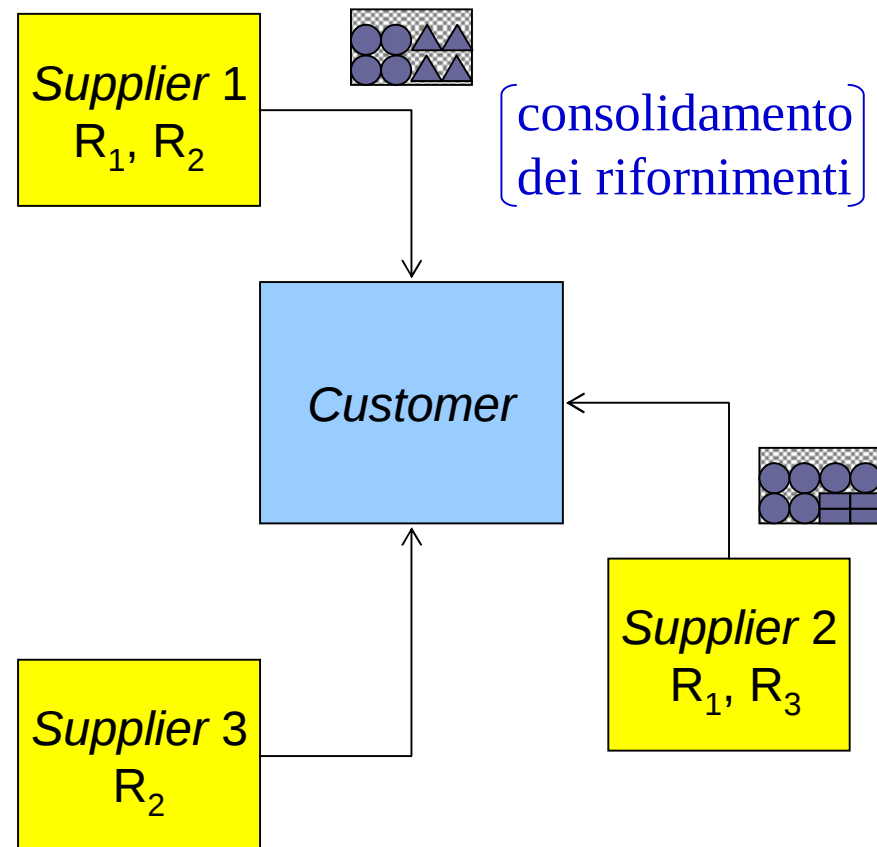
Costi di spedizione

- Anche le caratteristiche dell'**infrastruttura logistica**
 - molteplicità di fornitori
 - capacità dei collegamentihanno influenza sui costi
- Risorse **eterogenee** e/o **non ancora critiche** possono essere trasportate su un medesimo veicolo fino a saturazione della capacità, evitando la duplicazione di costi fissi



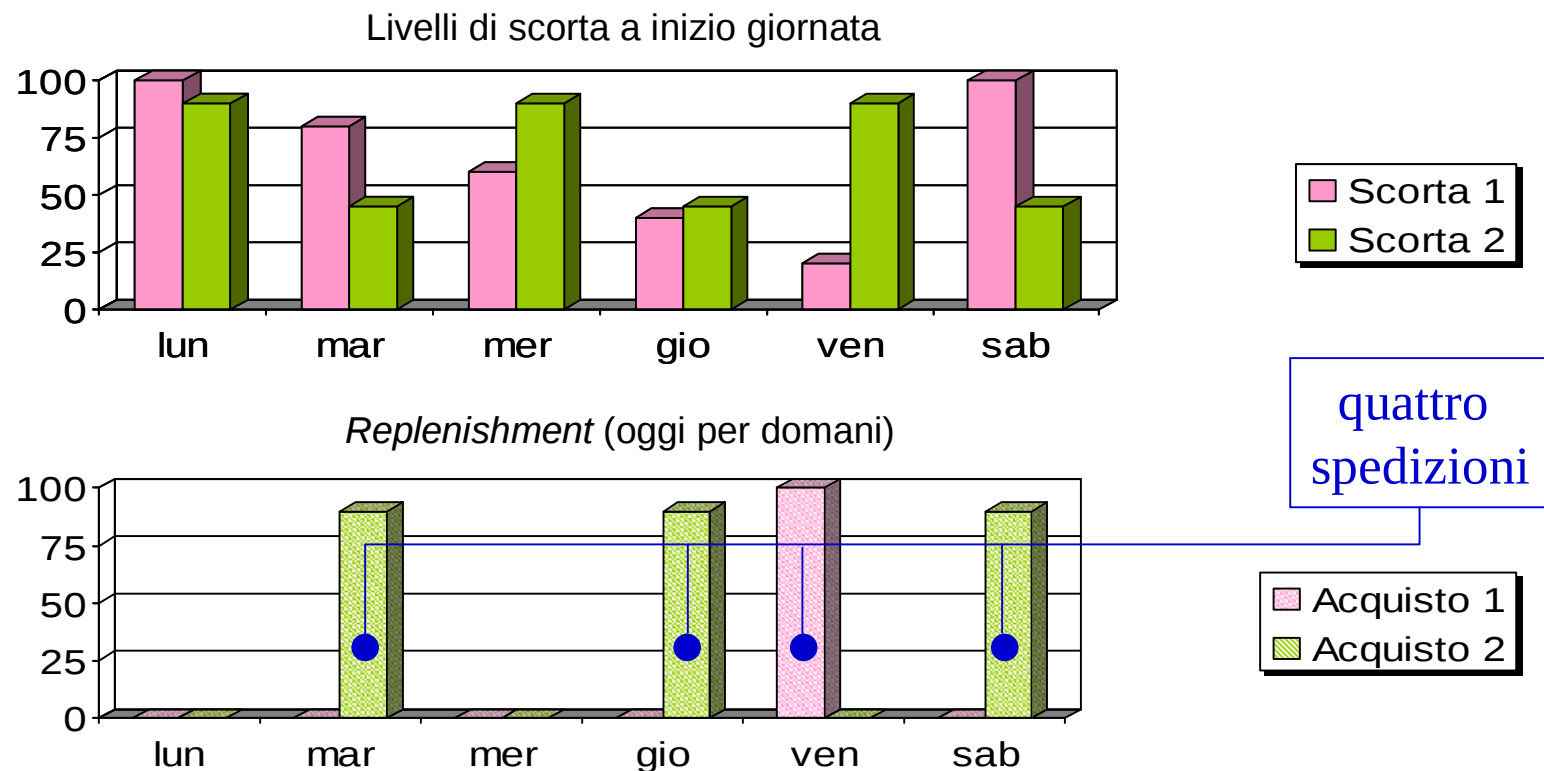
Costi di spedizione

- Anche le caratteristiche dell'**infrastruttura logistica**
 - molteplicità di fornitori
 - capacità dei collegamentihanno influenza sui costi
- Risorse **eterogenee** e/o **non ancora critiche** possono essere trasportate su un medesimo veicolo fino a saturazione della capacità, evitando la duplicazione di costi fissi



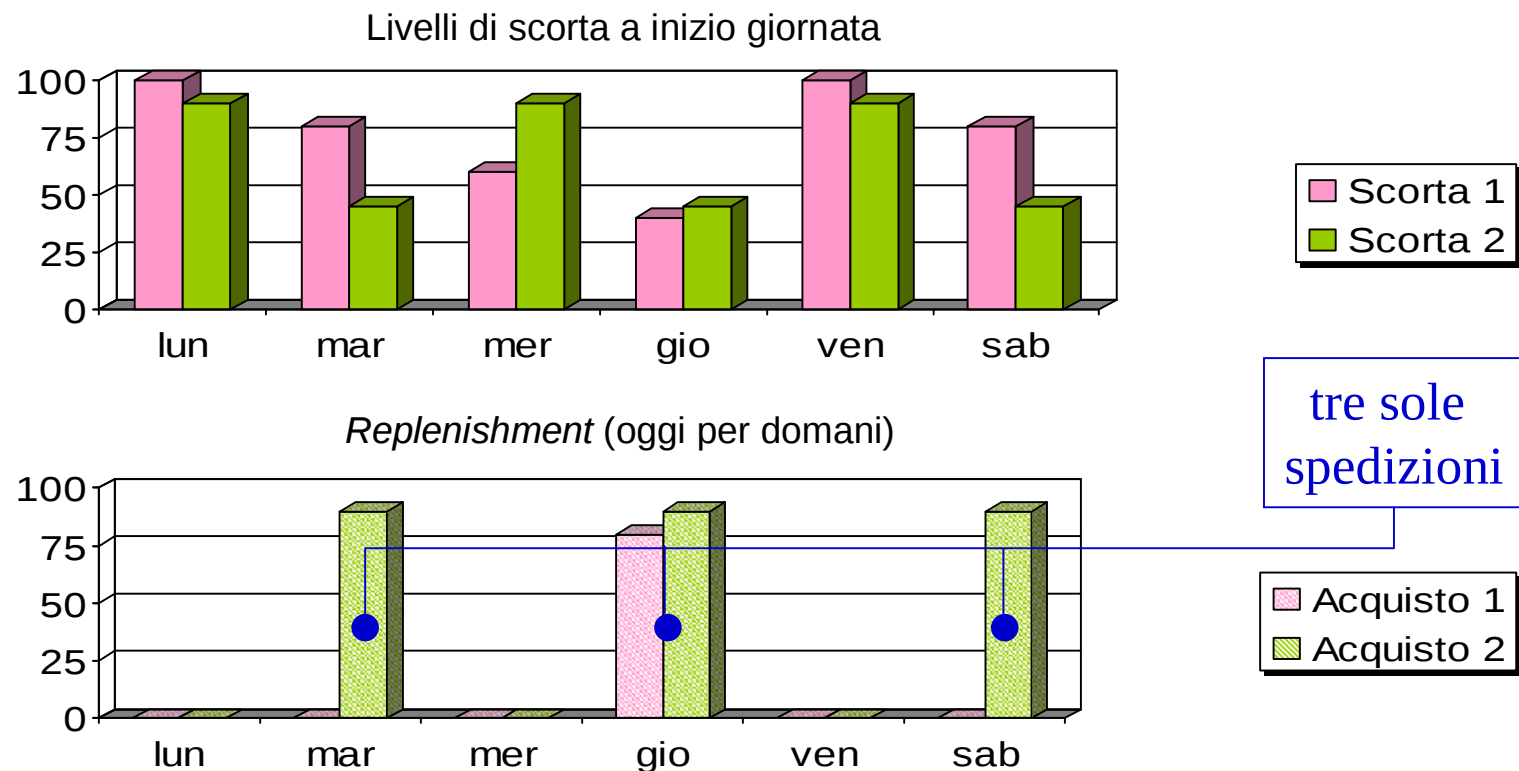
Costi di spedizione

- Può essere quindi conveniente sincronizzare i rifornimenti per **condividere** risorse di trasporto e ottenere **economie di scala**



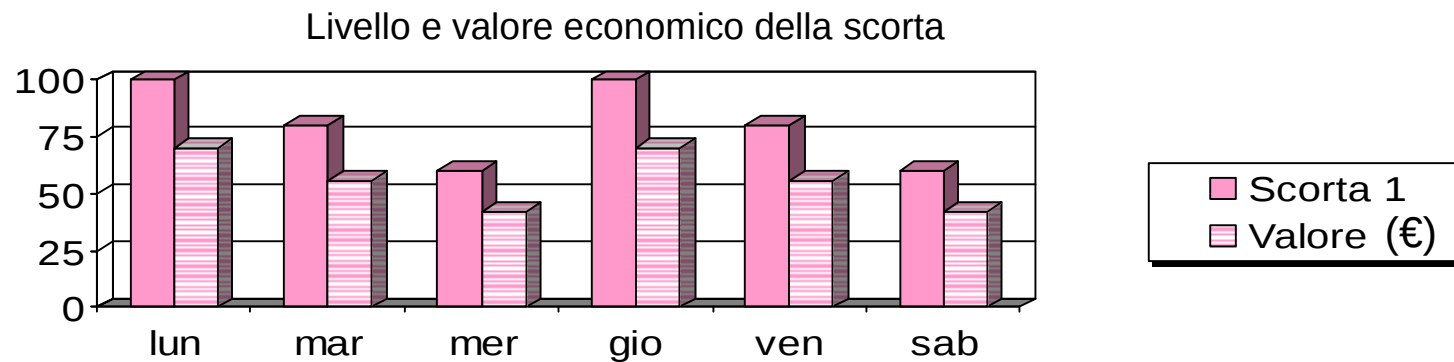
Costi di spedizione

- Può essere quindi conveniente sincronizzare i rifornimenti per condividere risorse di trasporto e ottenere economie di scala



3. Costi di giacenza Ù

- Tuttavia mantenere immobilizzato un bene materiale comporta un costo, quantificabile in sostanza come **utili non percepiti**



- Pensiamo a un conto in banca: a fine anno vengono accreditati utili il cui valore U cresce con

- la **permanenza di valuta** sul conto
- il **saggio di interesse** σ_t praticato in ogni giorno t del periodo T

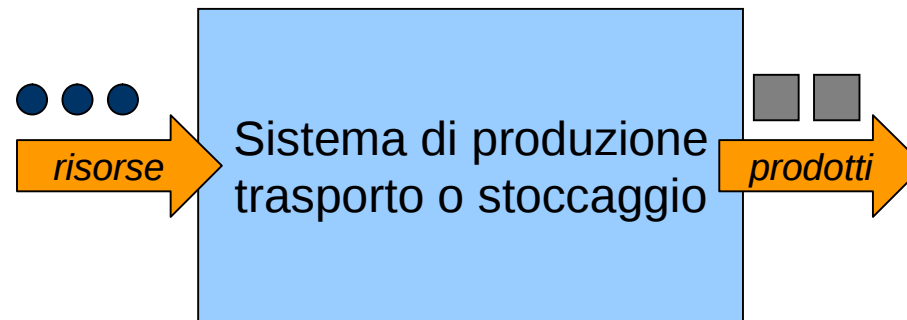
$$U = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \sigma_t v_t b_t$$

Costo per la giacenza di un'unità di risorsa nel giorno t

$g_0(t) = \sigma_t v_t$ $\xrightarrow{\quad \wedge \quad}$

Costi di giacenza

- Minore l'**accumulo di scorte** nel sistema;
minore il **tempo di latenza** dei materiali
(tempo di attraversamento o *lead time*);



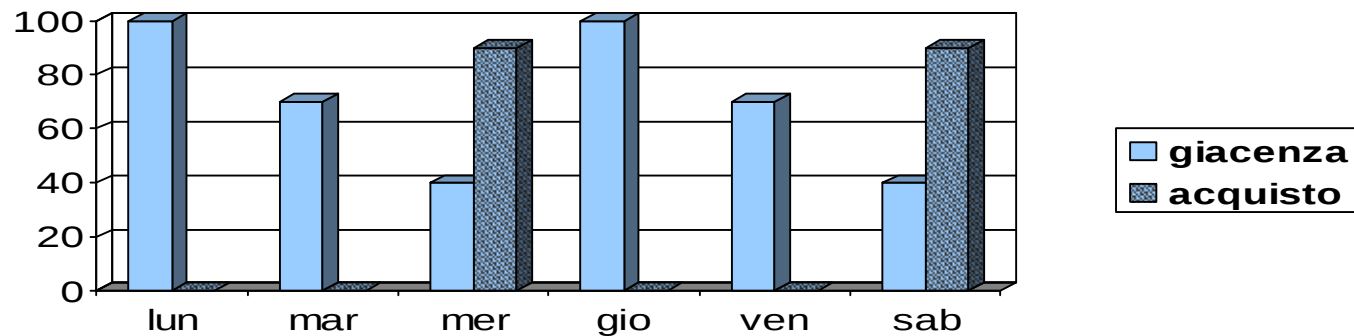
minori i **costi di giacenza**.

- Il costo di giacenza dipende quindi:
 - dal **valore economico** della risorsa
 - dal suo **quantitativo medio** immobilizzato o nascosto all'interno del sistema nel periodo di pianificazione

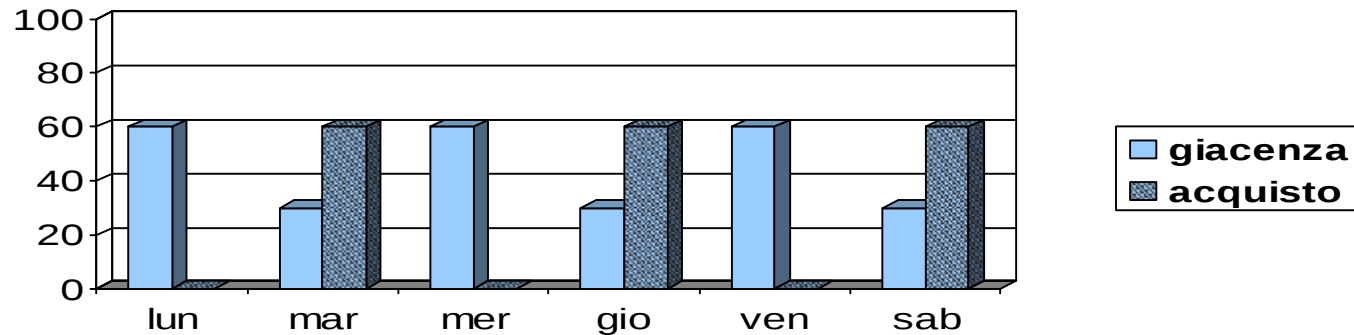
Controindicazioni

- Di norma l'andamento del costo di giacenza è **opposto** a quello del costo di spedizione

*elevata giacenza
due spedizioni a
settimana*



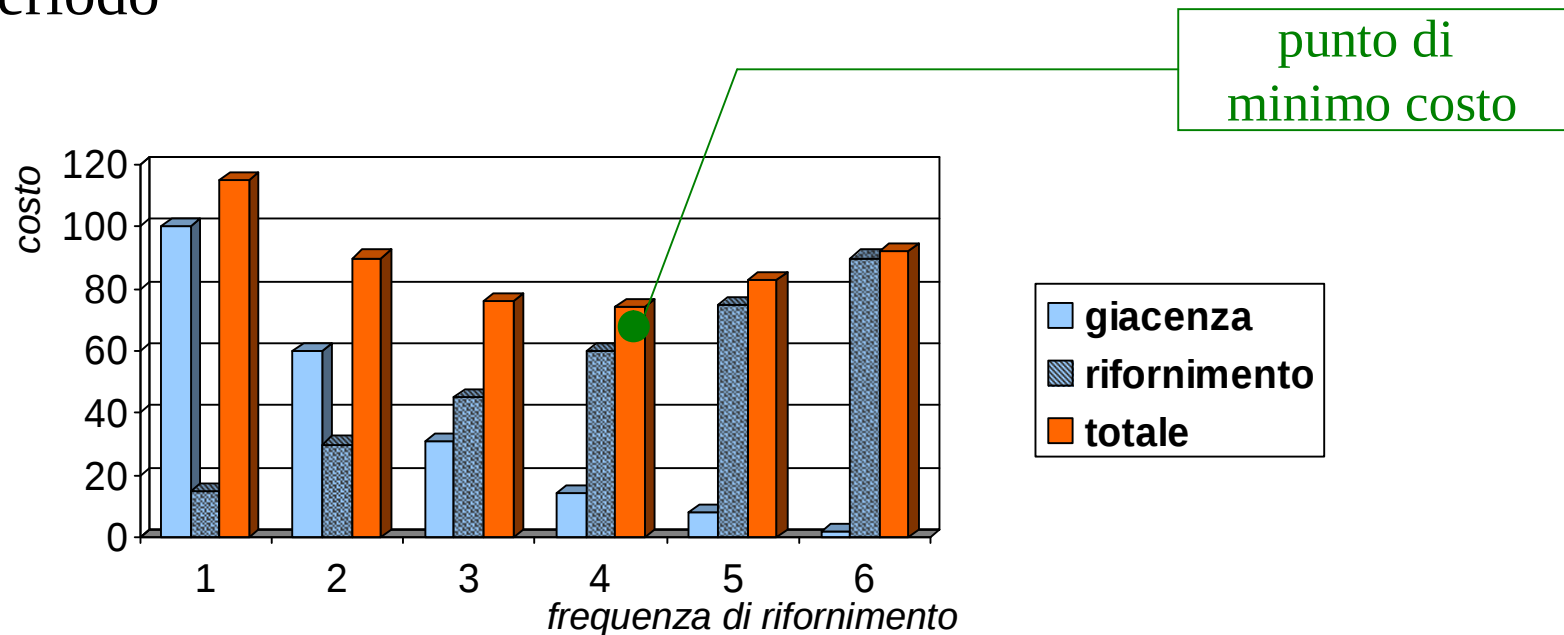
*bassa giacenza
tre spedizioni a
settimana*



Controindicazioni

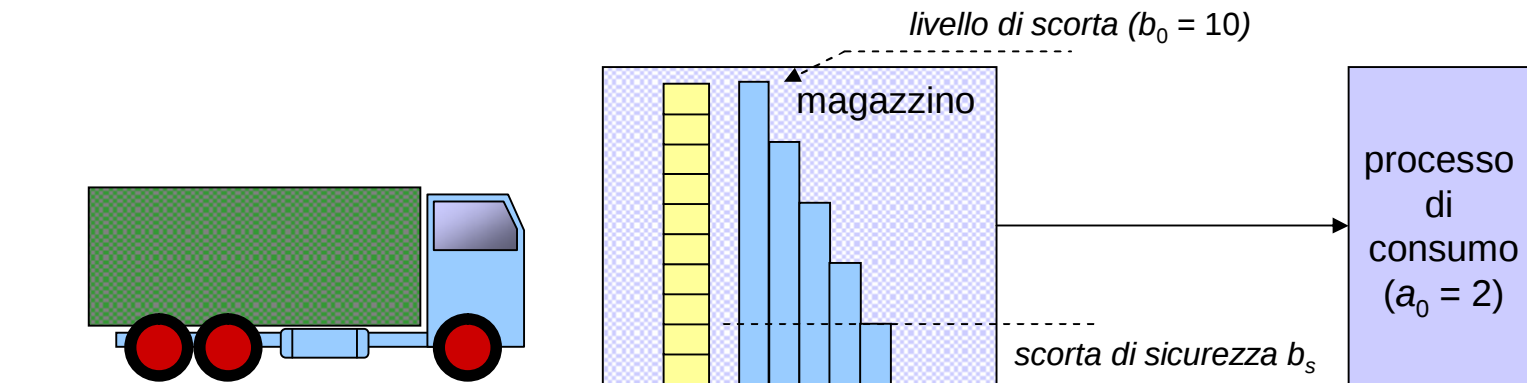
- In un periodo di pianificazione prefissato T
 - il costo di giacenza *decresce*
 - il costo di trasporto *cresce*

con la *frequenza $f = 1/\Delta t$ di rifornimento* delle risorse nel periodo

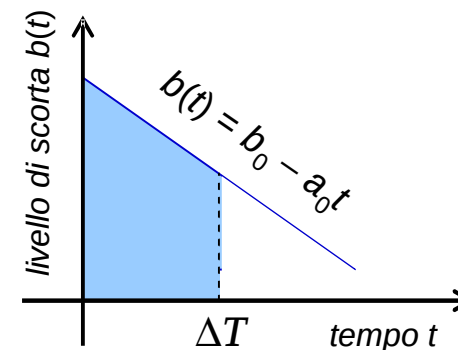


4. Gestione ordini periodici Ù

- Per modellare il problema di minimizzare i costi complessivi (giacenza + trasporto) iniziamo con l'ipotizzare quanto segue:
 - una sola risorsa viene consumata con tasso di assorbimento costante a_0 fino a un certo limite di sicurezza b_s (safety stock)

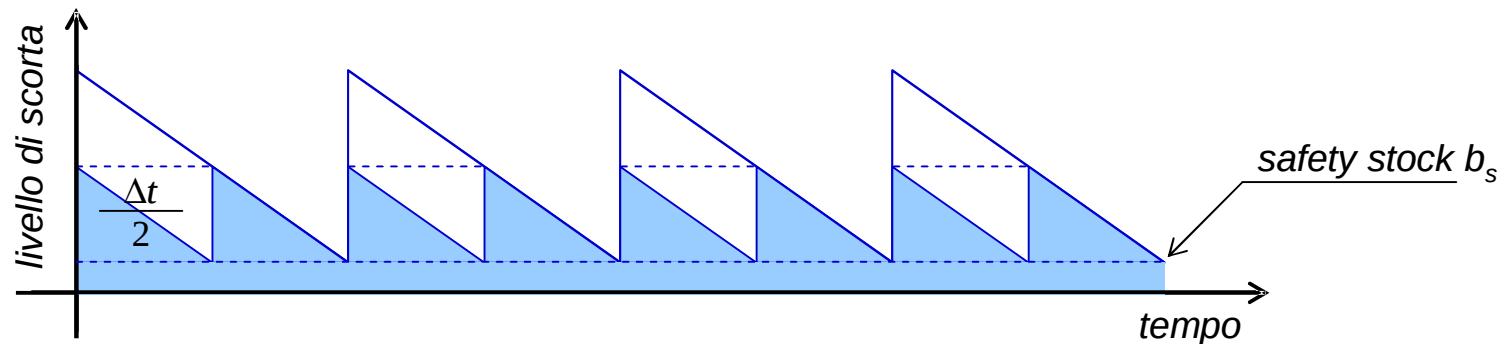


- il livello di scorta in magazzino $b(t)$ **decresce** quindi **linearmente** nel tempo
- la giacenza media nell'intervallo $[0, \Delta T]$ corrisponde all'**area celeste** $= \int_0^{\Delta T} b(t)dt$



Gestione ordini periodici

- Per modellare il problema di minimizzare i costi complessivi (giacenza + trasporto) iniziamo con l'ipotizzare quanto segue:
 - una sola risorsa viene consumata con tasso di assorbimento costante a_0 fino a un certo limite di sicurezza b_s (*safety stock*)
 - l'approvvigionamento avviene con **periodo costante Δt** e con un **costo s_0 per ciascuna spedizione**, indipendentemente dal quantitativo spedito



Dimezzamento del periodo di rifornimento (**raddoppia** la frequenza)

=

Dimezzamento della giacenza variabile + **Raddoppio** delle spedizioni

Lotto economico di acquisto

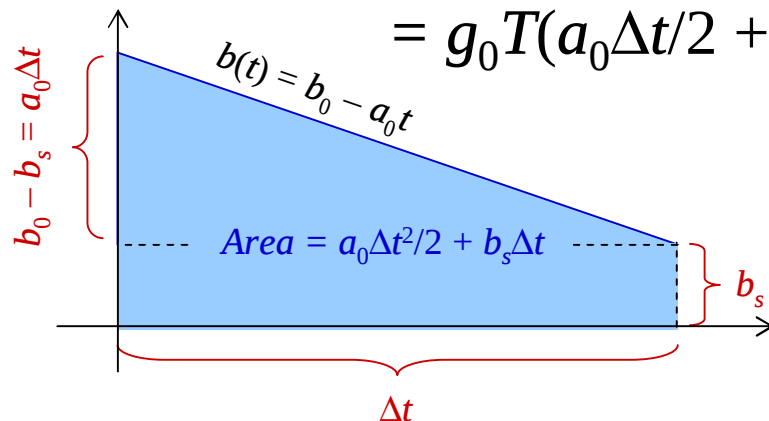
(Economic Order Quantity)

- Si possono allora esprimere i costi di giacenza e trasporto in un orizzonte temporale T come:

$$s(\Delta t) = s_0 \cdot \frac{T}{\Delta t}$$

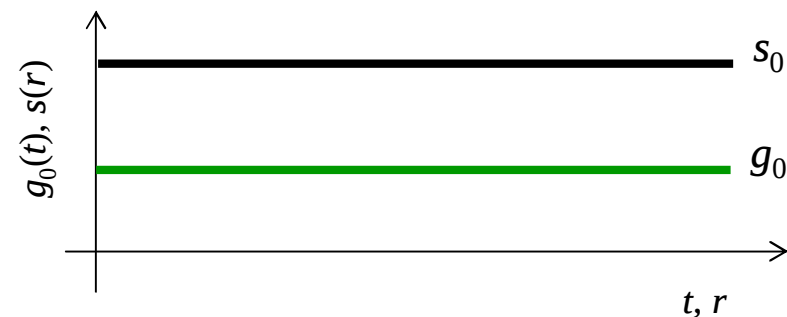
$$g(\Delta t) = g_0 \cdot \int_0^T b(t) dt =$$

$$= g_0 T (a_0 \Delta t / 2 + b_s)$$



- Supponiamo che

- il costo di giacenza $g_0(t)$ di un'unità di risorsa in un tempo unitario (es. un giorno) **non vari nel tempo**: $g_0(t) = g_0$
- il costo $s(r)$ di una singola spedizione **non dipenda dalla quantità r spedita**: $s(r) = s_0$



Lotto economico di acquisto

(Economic Order Quantity)

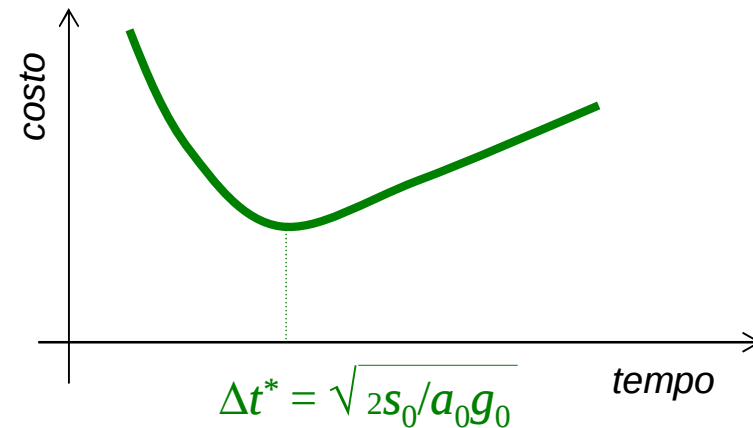
- Si possono allora esprimere i costi di giacenza e trasporto in un orizzonte temporale T come:

$$s(\Delta t) = s_0 \cdot \frac{T}{\Delta t}$$

$$g(\Delta t) = g_0 T (a_0 \Delta t / 2 + b_s)$$

- Il costo complessivo di gestione è pari a

$$C(\Delta t) = T \left(\frac{s_0}{\Delta t} + \frac{a_0 g_0 \Delta t}{2} + g_0 b_s \right)$$



- Esiste un'unica **soluzione ottima** Δt^* , indipendente da T e b_s , che si può calcolare annullando la derivata prima:

$$0 = \frac{a_0 g_0}{2} - \frac{s_0}{\Delta t^2}$$

Assorbimento variabile

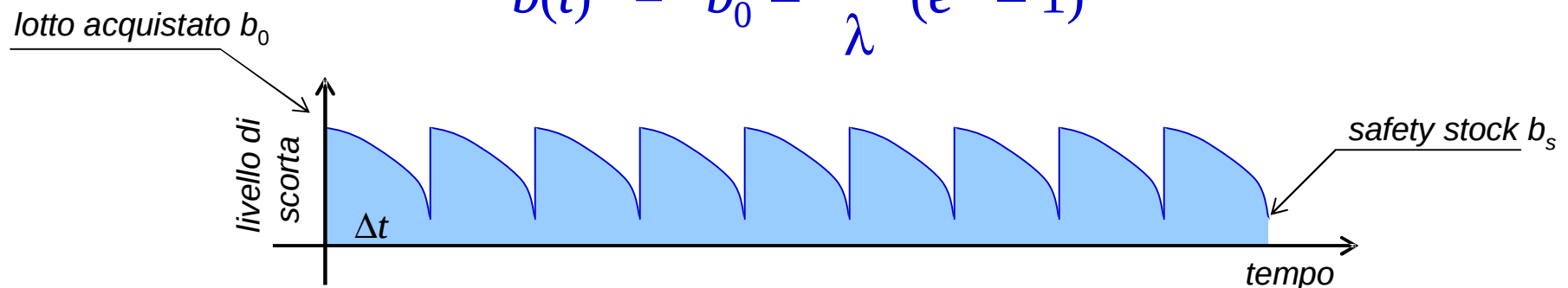
- In alcuni casi (ad es. risorse deperibili, obsolescenza etc.) l'ipotesi di tasso di assorbimento costante nel tempo può risultare **troppo semplicistica**.
- **Esempio**. In un'industria conserviera la quantità di prodotto trattabile decresce in ragione del tempo t trascorso dalla sua acquisizione. Ciò fa sì che la **quantità necessaria** per ottenere un'unità di prodotto finito **cresca con t** , o in altri termini che il tasso di assorbimento della scorta sia una funzione crescente del tempo: **$a = a(t)$**
Detta **$r = b_0$** la scorta di prodotto fresco acquisita all'istante **$t_0 = 0$** , a t ore di distanza il livello di scorta sarà dato da

$$b(t) = b_0 - \int_0^t a(\tau) d\tau$$

Costo di giacenza

- In genere, il tasso di deterioramento di un prodotto ha un andamento esponenziale. Supponiamo $a(t) = a_0 e^{\lambda t}$, con $a(0) = a_0$ (tasso di assorbimento iniziale) e $\lambda \geq 0$. Si ha quindi

$$b(t) = b_0 - \frac{a_0}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$$

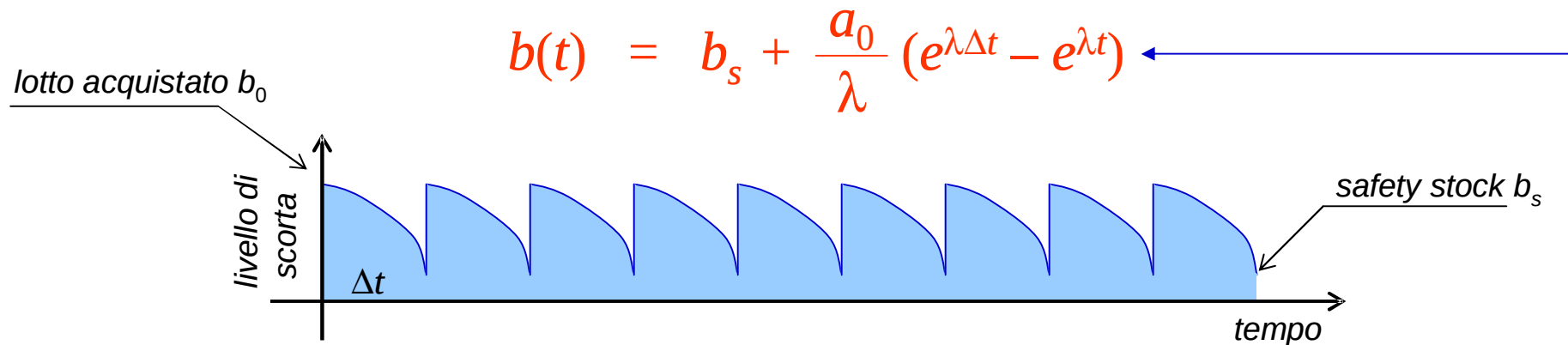


Detta $r = b_0$ la scorta di prodotto fresco acquisita all'istante $t_0 = 0$, a t ore di distanza il livello di scorta sarà dato da

$$b(t) = b_0 - \int_0^t a(\tau) d\tau$$

Costo di giacenza

- In genere, il tasso di deterioramento di un prodotto ha un andamento esponenziale. Supponiamo $a(t) = a_0 e^{\lambda t}$, con $a(0) = a_0$ (tasso di assorbimento iniziale) e $\lambda \geq 0$. Si ha quindi



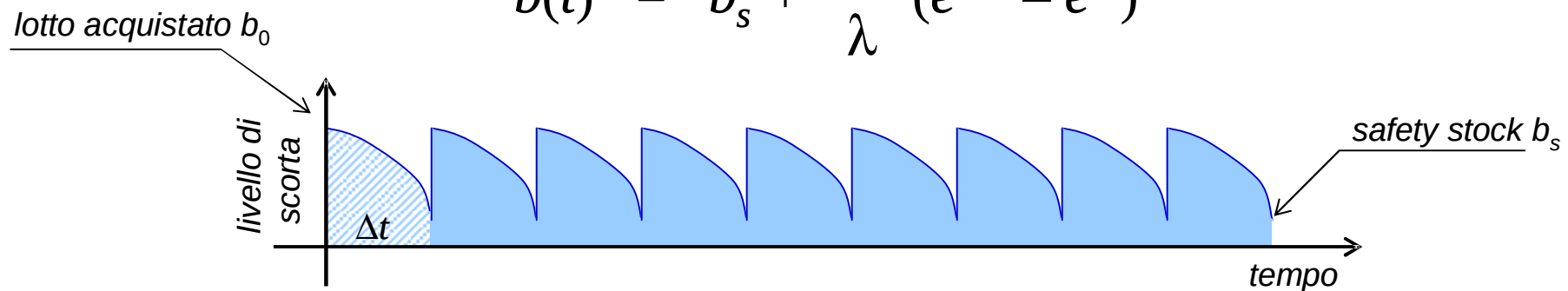
Sia Δt il **periodo di rifornimento**. Per evitare inutili giacenze il rifornimento b_0 va scelto in modo che la scorta residua al tempo Δt sia pari alla scorta di sicurezza b_s

$$b_s = b_0 - \frac{a_0}{\lambda} (e^{\lambda \Delta t} - 1) \quad \Rightarrow \quad b_0 = b_s + \frac{a_0}{\lambda} (e^{\lambda \Delta t} - 1)$$

Costo di giacenza

- In genere, il tasso di deterioramento di un prodotto ha un andamento esponenziale. Supponiamo $a(t) = a_0 e^{\lambda t}$, con $a(0) = a_0$ (tasso di assorbimento iniziale) e $\lambda \geq 0$. Si ha quindi

$$b(t) = b_s + \frac{a_0}{\lambda} (e^{\lambda \Delta t} - e^{\lambda t})$$



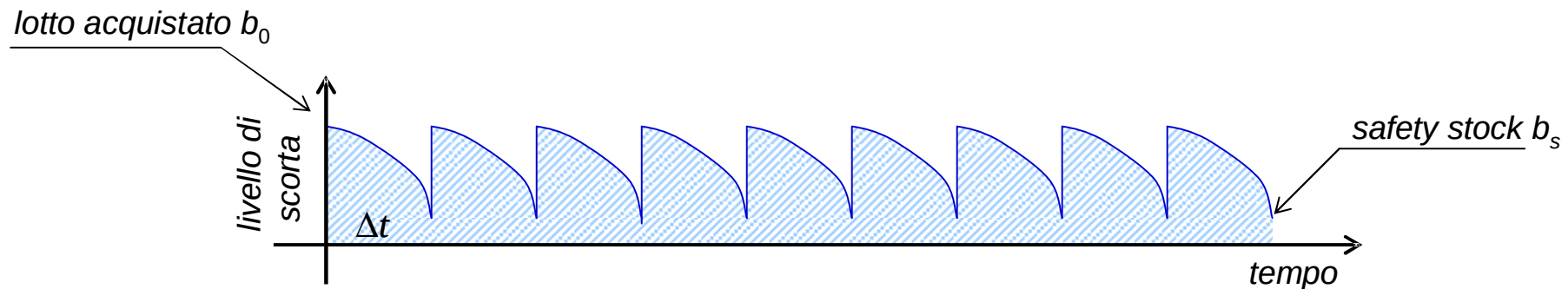
Il costo di giacenza dipende dal periodo Δt . Per esprimerlo calcoliamo l'integrale di $b(t)$ esteso all'intervallo $[0, \Delta t]$

$$\int_0^{\Delta t} (b_s + \frac{a_0}{\lambda} e^{\lambda \Delta t}) d\tau - \frac{a_0}{\lambda} \int_0^{\Delta t} e^{\lambda \tau} d\tau = b_s \Delta t + \frac{a_0 \Delta t}{\lambda} e^{\lambda \Delta t} - \frac{a_0}{\lambda^2} (e^{\lambda \Delta t} - 1)$$

Costo di giacenza

- Eseguendo i calcoli si ottiene l'area totale in funzione di Δt

$$Area = T \left[b_s + \frac{a_0}{\lambda} e^{\lambda \Delta t} - \frac{a_0}{\lambda^2 \Delta t} (e^{\lambda \Delta t} - 1) \right]$$



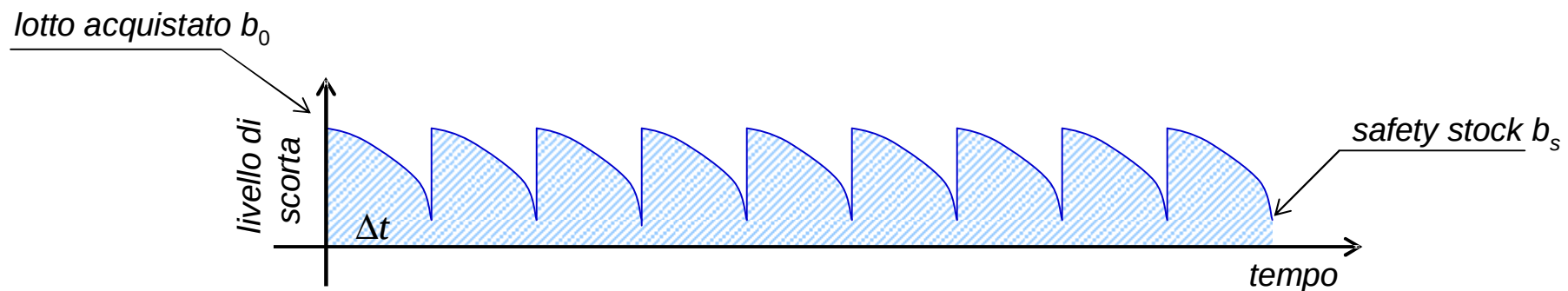
Quest'area si ripete $T/\Delta t$ volte nel periodo di pianificazione T

$$\frac{T}{\Delta t} \left[b_s \Delta t + \frac{a_0 \Delta t}{\lambda} e^{\lambda \Delta t} - \frac{a_0}{\lambda^2} (e^{\lambda \Delta t} - 1) \right]$$

Costo di giacenza

- Eseguendo i calcoli si ottiene l'area totale in funzione di Δt

$$Area = T \left[b_s + \frac{a_0}{\lambda} e^{\lambda \Delta t} - \frac{a_0}{\lambda^2 \Delta t} (e^{\lambda \Delta t} - 1) \right]$$



Il costo di giacenza è proporzionale all'area secondo g_0

$$g(\Delta t) = g_0 T \left[b_s + \frac{a_0}{\lambda} e^{\lambda \Delta t} - \frac{a_0}{\lambda^2 \Delta t} (e^{\lambda \Delta t} - 1) \right]$$

Costo totale

Il costo totale si ottiene sommando tra loro

- il costo di **giacenza**

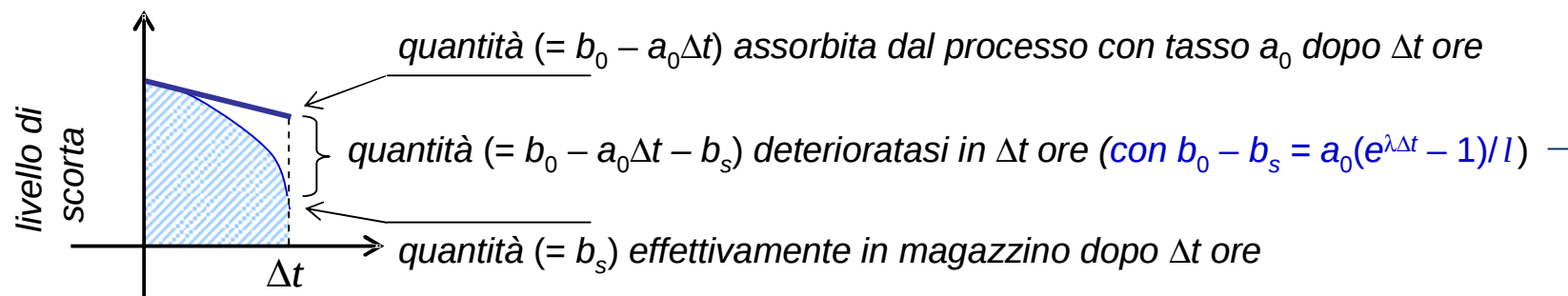
$$g(\Delta t) = g_0 T \left[b_s + \frac{a_0}{\lambda} e^{\lambda \Delta t} - \frac{a_0}{\lambda^2 \Delta t} (e^{\lambda \Delta t} - 1) \right]$$

- il costo di **spedizione** (proporzionale secondo s_0 al numero di spedizioni nel periodo di pianificazione)

$$s(\Delta t) = s_0 T / \Delta t$$

- il costo dovuto alle **perdite di prodotto per deterioramento** (proporzionale secondo il valore v_0 del prodotto alla quantità deterioratasi nell'intervallo Δt)

$$p(\Delta t) = \frac{v_0 a_0}{\lambda} (e^{\lambda \Delta t} - \lambda \Delta t - 1)$$



Costo totale

Il costo totale si ottiene sommando tra loro

- il costo di **giacenza**
- il costo di **spedizione**
- il costo dovuto alle **perdite di prodotto per deterioramento**

$$C(\Delta t) =$$
$$= g_0 T \left[b_s + \frac{a_0}{\lambda} e^{\lambda \Delta t} - \frac{a_0}{\lambda^2 \Delta t} (e^{\lambda \Delta t} - 1) + \frac{s_0}{g_0 \Delta t} \right] + \frac{v_0 a_0}{\lambda} (e^{\lambda \Delta t} - \lambda \Delta t - 1)$$

Periodo di rifornimento ottimo

- Come nel caso di assorbimento costante, il **periodo di rifornimento ottimo Δt^*** si ricava annullando la derivata di $C(\Delta t)$

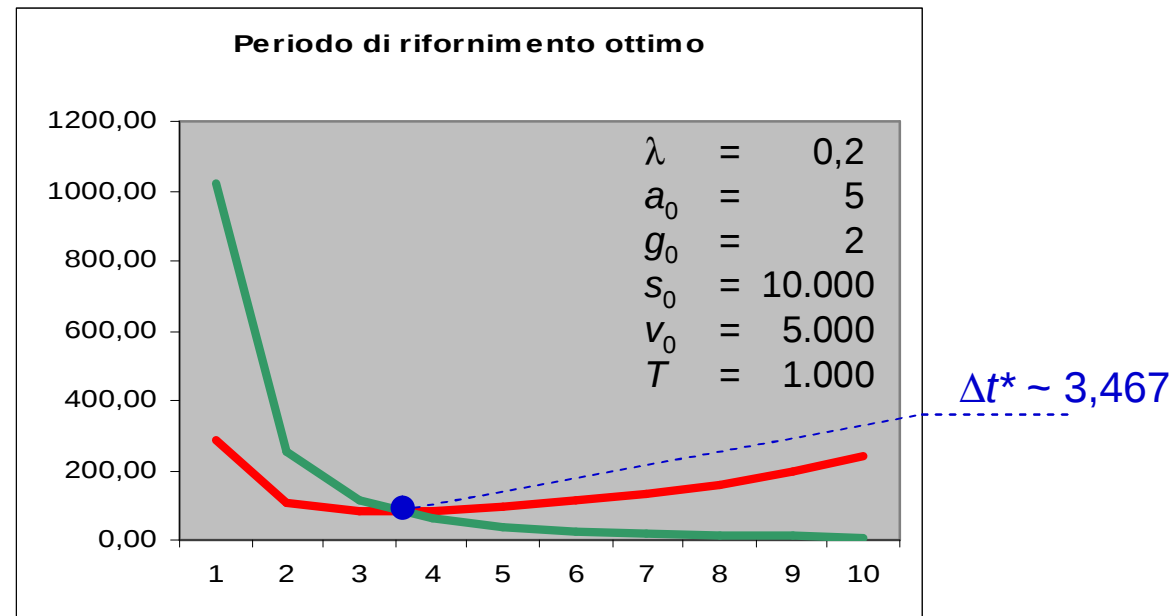
$$0 = a_0 \left[e^{\lambda \Delta t} - \frac{1}{\lambda^2 \Delta t^2} - \frac{1}{\lambda \Delta t} e^{\lambda \Delta t} + \frac{1}{\lambda^2 \Delta t^2} e^{\lambda \Delta t} - \frac{s_0}{a_0 g_0 \Delta t^2} + \frac{v_0}{g_0 T} (e^{\lambda \Delta t} - 1) \right]$$

$$\left[1 - \frac{1}{\lambda \Delta t} + \frac{1}{\lambda^2 \Delta t^2} + \frac{v_0}{g_0 T} \right] e^{\lambda \Delta t} = \frac{1 + \lambda^2 s_0 / a_0 g_0}{\lambda^2 \Delta t^2} - \frac{v_0}{T g_0}$$

$$C(\Delta t) =$$

$$= g_0 T \left[b_s + \frac{a_0}{\lambda} e^{\lambda \Delta t} - \frac{a_0}{\lambda^2 \Delta t} (e^{\lambda \Delta t} - 1) + \frac{s_0}{g_0 \Delta t} \right] + \frac{v_0 a_0}{\lambda} (e^{\lambda \Delta t} - \lambda \Delta t - 1)$$

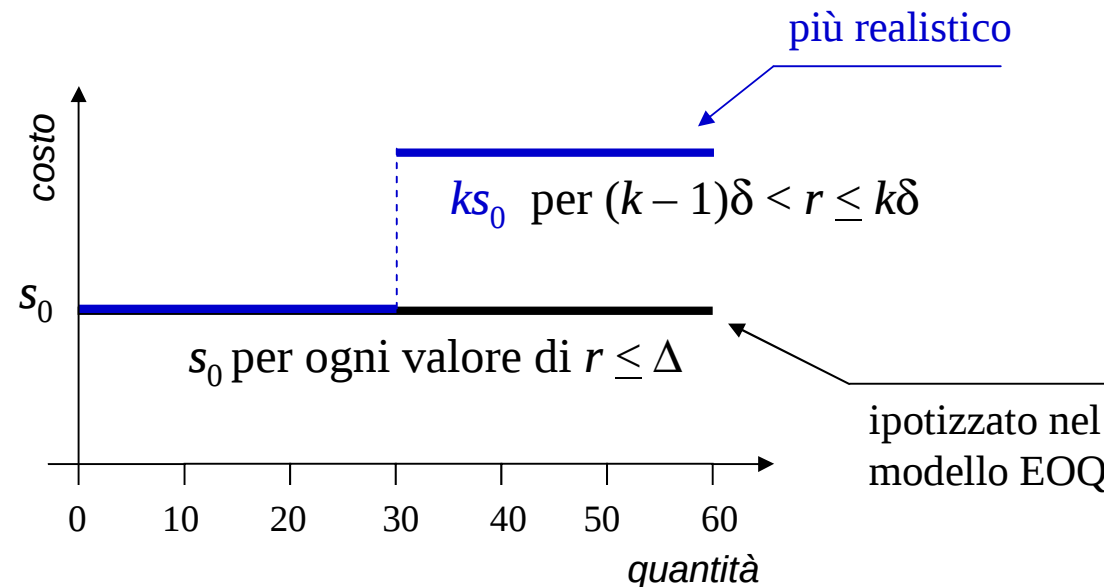
Periodo di rifornimento ottimo



$$\left[1 - \frac{1}{\lambda \Delta t} + \frac{1}{\lambda^2 \Delta t^2} + \frac{v_0}{g_0 T} \right] e^{\lambda \Delta t} = \frac{1 + \lambda^2 s_0 / a_0 g_0}{\lambda^2 \Delta t^2} - \frac{v_0}{T g_0}$$

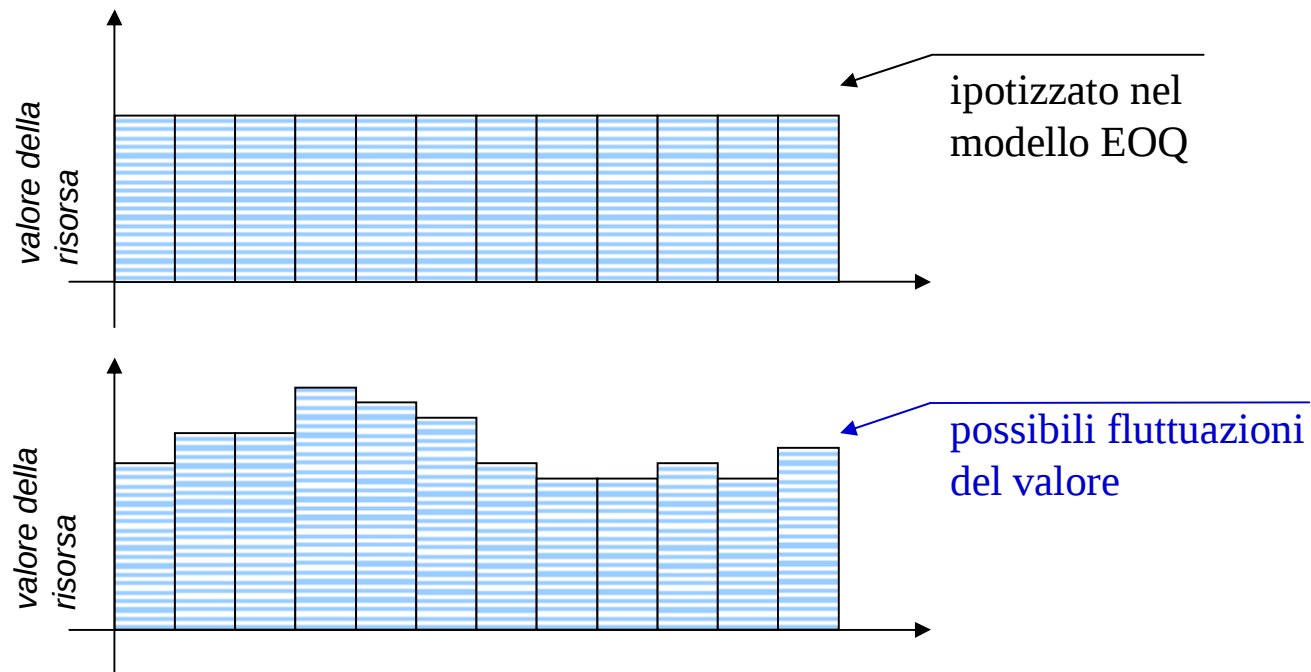
5. Limiti del modello EOQ Ù

- Il modello EOQ non consente di
 - esprimere il **costo di spedizione** in funzione della **quantità** del rifornimento e/o della **distanza** dal fornitore



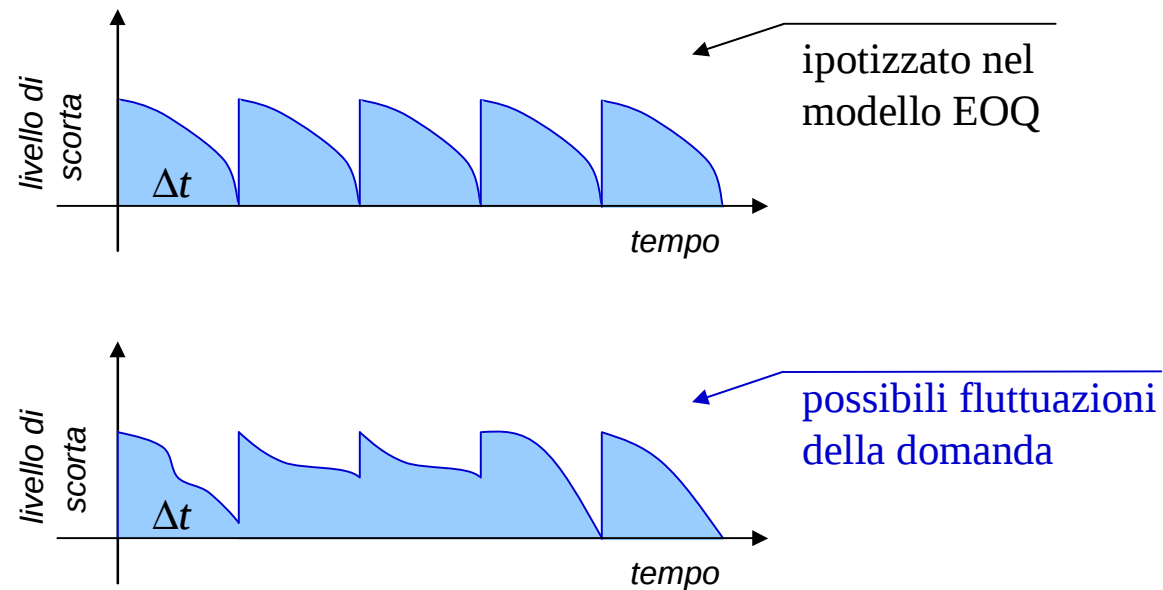
Limiti del modello EOQ

- Il modello EOQ non consente di
 - 2) esprimere l'effetto sui costi di giacenza di **variazioni del valore delle risorse** nel tempo



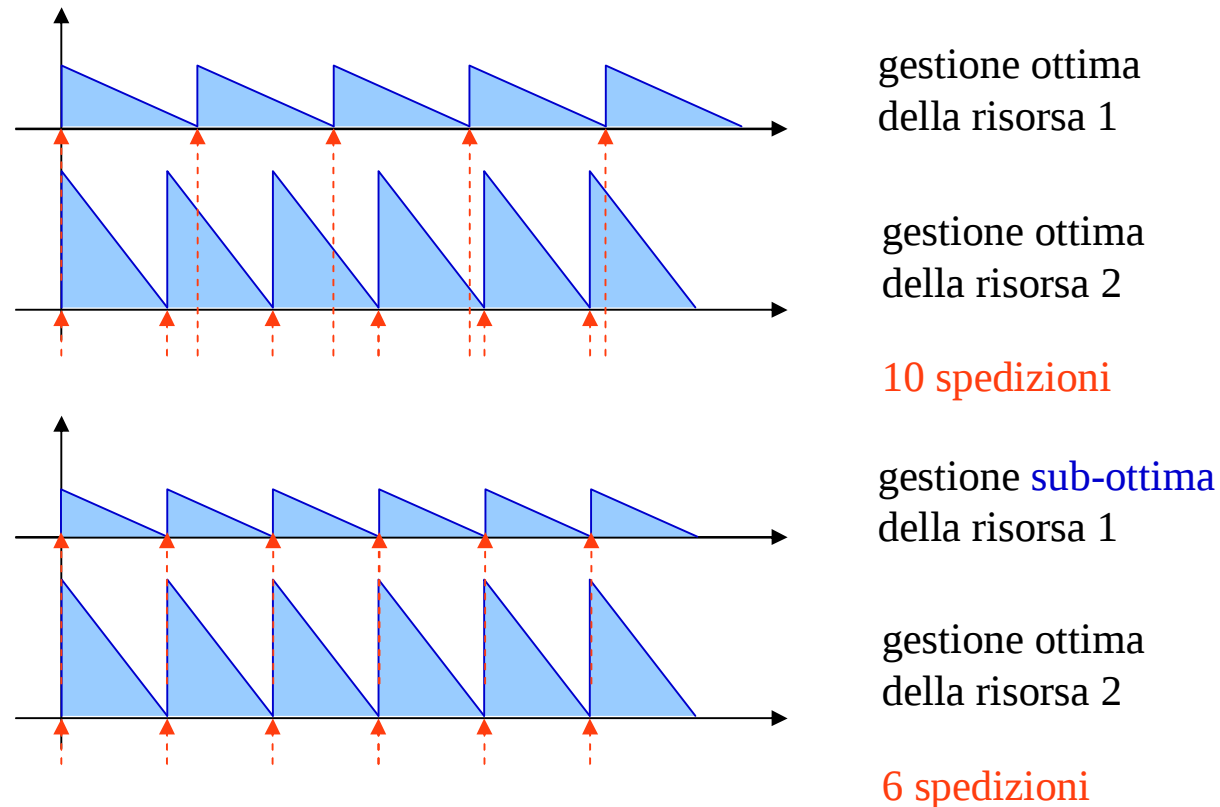
Limiti del modello EOQ

- Il modello EOQ non consente di
 - 3) tenere conto di un **andamento irregolare dell'assorbimento** di risorse dovuto, ad esempio, a variazioni della domanda da parte del mercato



Limiti del modello EOQ

- Il modello EOQ non consente di
 - ottimizzare la **gestione contemporanea** di più scorte

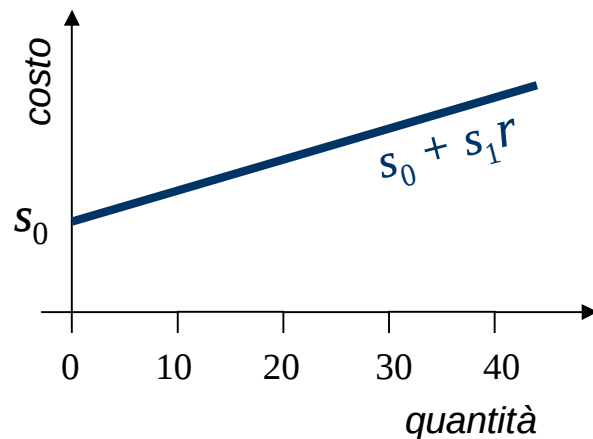


Limiti del modello EOQ

- Il primo di questi quattro limiti:
 - 1) esprimere il **costo di spedizione** in funzione della **quantità** del rifornimento e/o della **distanza** dal fornitore

può in alcuni casi essere superato con lievi modifiche.

Nel caso infatti di assorbimento costante ($b(t) = b_0 - a_0 t$), se il costo di spedizione ha la forma $s(r) = s_0 + s_1 r$ la sua **somma durante T** è



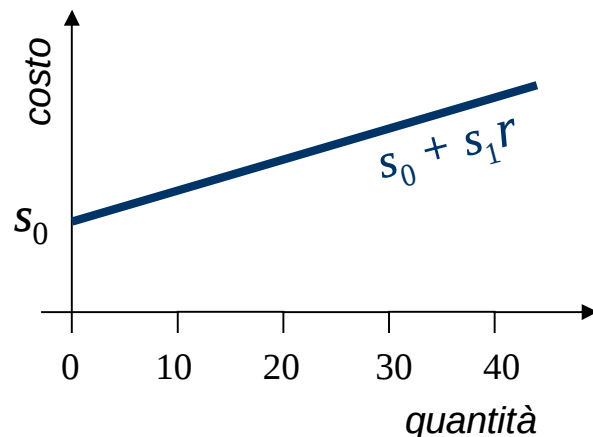
$$\begin{aligned} s(\Delta t) &= \frac{T}{\Delta t} [s_0 + s_1(b_0 - b_s)] = \\ &= \frac{T}{\Delta t} [s_0 + s_1 a_0 \Delta t] = \\ &= \frac{T}{\Delta t} s_0 + T s_1 a_0 \end{aligned}$$

Limiti del modello EOQ

- Il primo di questi quattro limiti:
 - 1) esprimere il **costo di spedizione** in funzione della **quantità** del rifornimento e/o della **distanza** dal fornitore

può in alcuni casi essere superato con lievi modifiche.

Il termine di costo Ts_1a_0 **non dipende** dal periodo Δt e non contribuisce alla derivata prima del costo totale.



Quindi **non influenza** il valore Δt^* del periodo di rifornimento ottimo.

Si noti che ciò **non è vero** in caso di assorbimento **non costante**.

$$s(\Delta t) = \frac{T}{\Delta t} s_0 + Ts_1 a_0$$