Problemi di localizzazione

Claudio Arbib

Università di L'Aquila

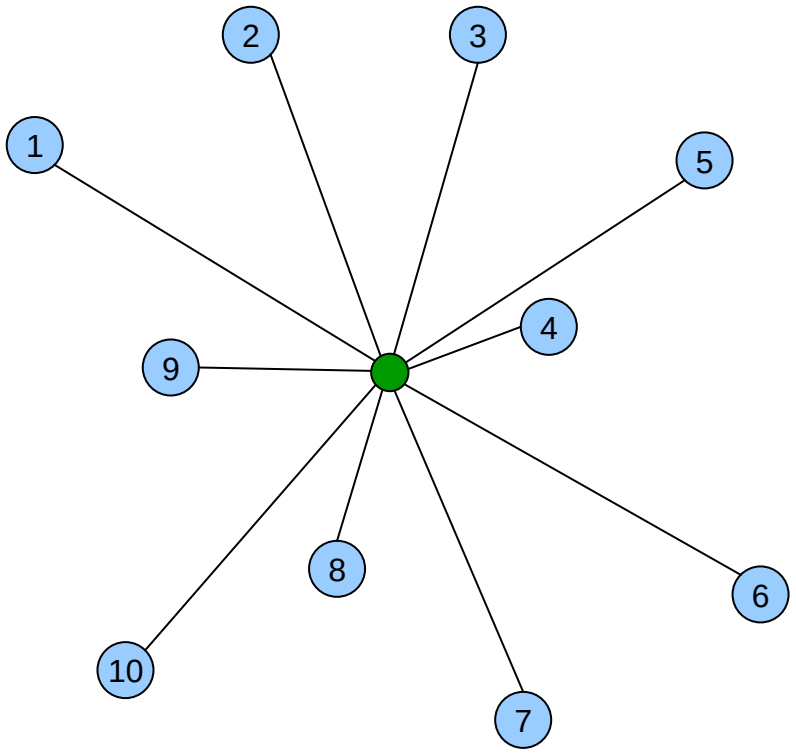
Prima Parte (marzo 2007):
problemi con singolo decisore

1. Introduzione

- Un problema di localizzazione consiste in generale nel decidere dove piazzare un insieme di centri di servizio volti a soddisfare una domanda distribuita in un territorio
- In molti casi pratici la domanda nasce da un insieme *discreto* V di clienti
- Pensiamo ad esempio al problema di localizzare in IR^2 un punto P_0 di coordinate x_0, y_0 in modo che la media delle distanze dei punti di V da P_0 sia minore possibile
- Vogliamo cioè scegliere x_0, y_0 in modo che la quantità

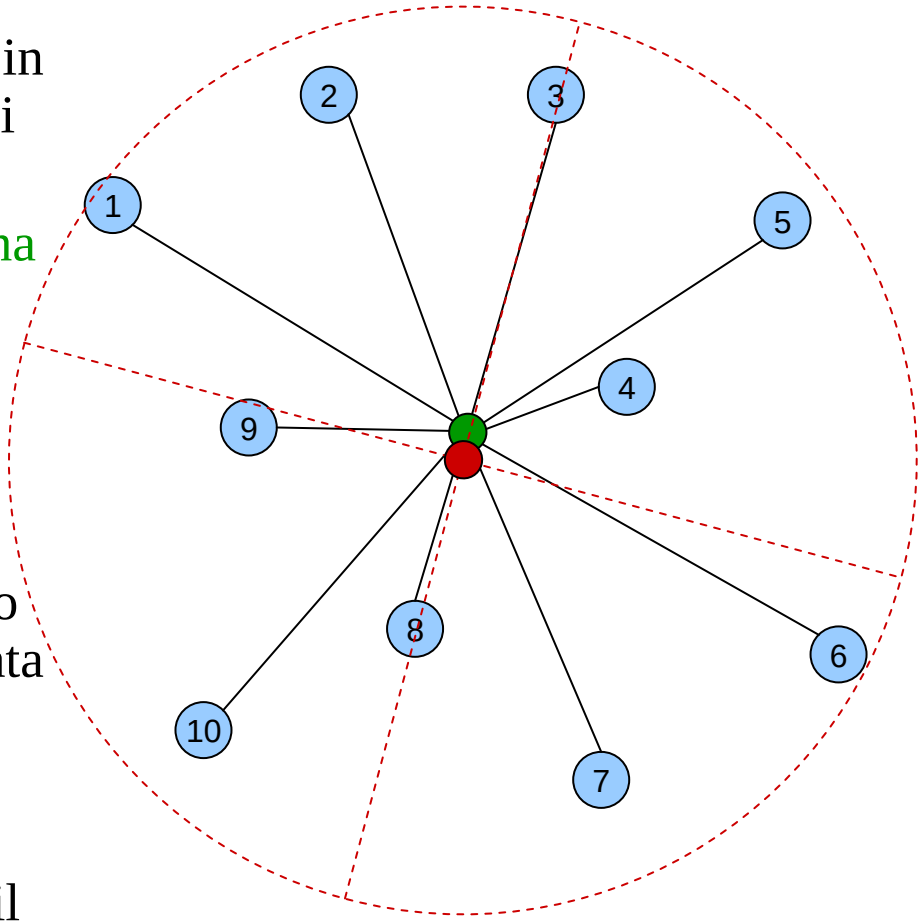
$$d_0 = \frac{1}{|V|} \sum_{i \in V} \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$$

sia minima



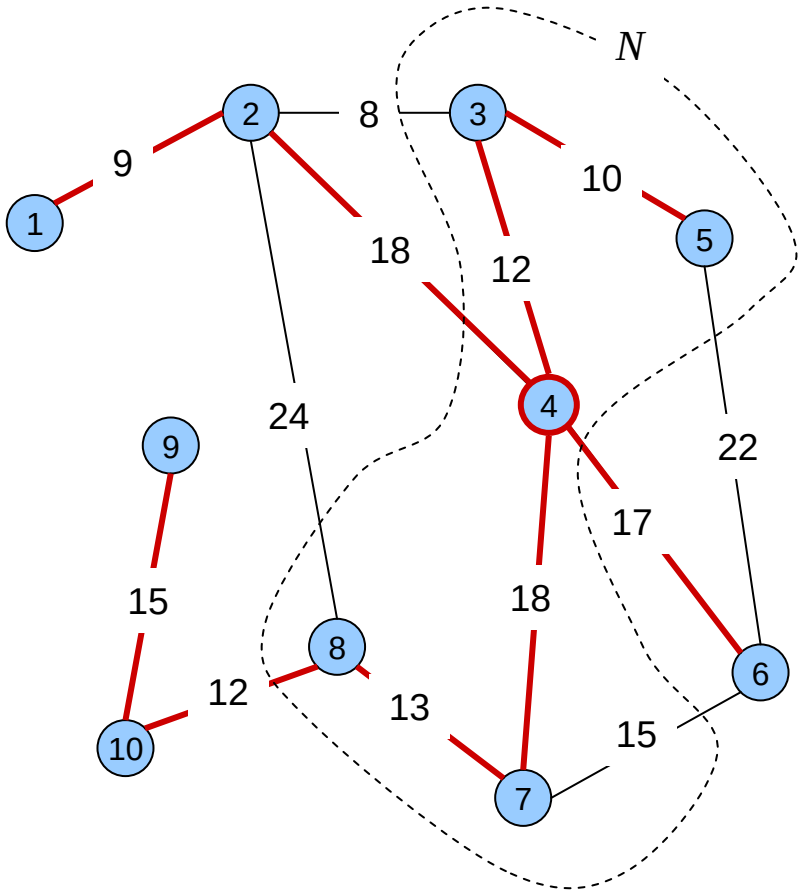
1. Introduzione

- La soluzione si calcola risolvendo il sistema (non lineare) di due equazioni in x_0, y_0 ottenuto annullando le derivate di d_0 fatte rispetto a x_0 e y_0
- Il punto P_0 così ricavato si dice mediana di V
- In pratica, la mediana può però essere soggetta ad “attrazione” da parte di un sottoinsieme S di V relativamente numeroso addensato in una regione limitata: i punti fuori da S si potrebbero allora trovare in condizione svantaggiata
- Per ovviare a questo inconveniente si può pensare di localizzare il centro del più piccolo cerchio contenente V, cosicché nessun punto si troverà oltre il raggio di tale cerchio



1. Introduzione

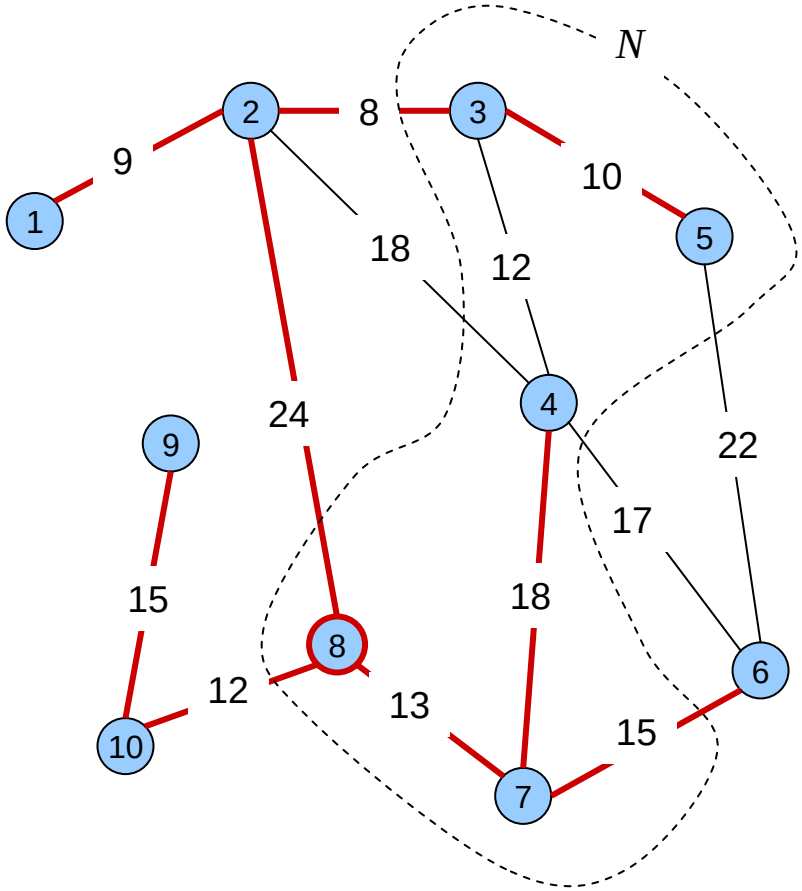
- La scelta ottimale potrebbe peraltro essere influenzata da altre considerazioni di carattere pratico
- Se ad esempio si tratta di scegliere il luogo ideale per un servizio come un'infrastruttura logistica (ad esempio un interporto), non tutti i punti di IR^2 sono candidabili, ma solo quelli appartenenti a un particolare insieme discreto N
- Inoltre la metrica euclidea potrebbe non essere adatta a rappresentare le distanze in gioco
- Comunque anche in questo caso si può scegliere P_0 minimizzando
  - la somma delle distanze dei clienti (min-sum)
  - la massima distanza di un cliente (min-max)



sum = 246, max = 58 (nodo 9)

1. Introduzione

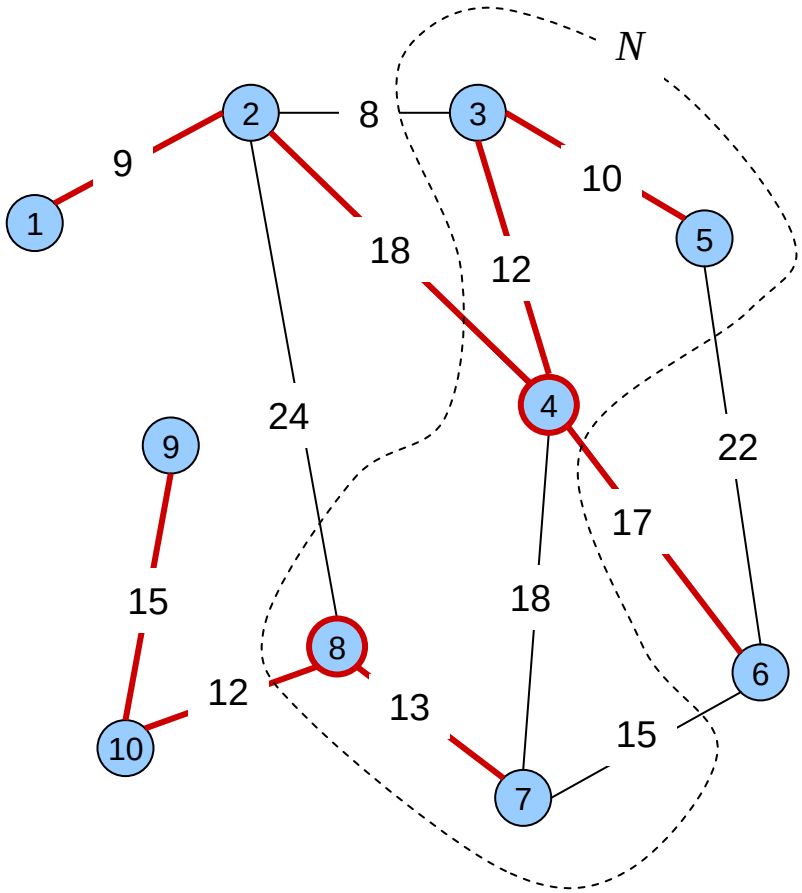
- La scelta ottimale potrebbe peraltro essere influenzata da altre considerazioni di carattere pratico
- Se ad esempio si tratta di scegliere il luogo ideale per un servizio come un'infrastruttura logistica (ad esempio un interporto), non tutti i punti di IR^2 sono candidabili, ma solo quelli appartenenti a un particolare insieme discreto N
- Inoltre la metrica euclidea potrebbe non essere adatta a rappresentare le distanze in gioco
- Comunque anche in questo caso si può scegliere P_0 minimizzando
  - la somma delle distanze dei clienti (min-sum)
  - la massima distanza di un cliente (min-max)



sum = 242, max = 42 (nodo 5)

2. *p*-mediana e *p*-centro

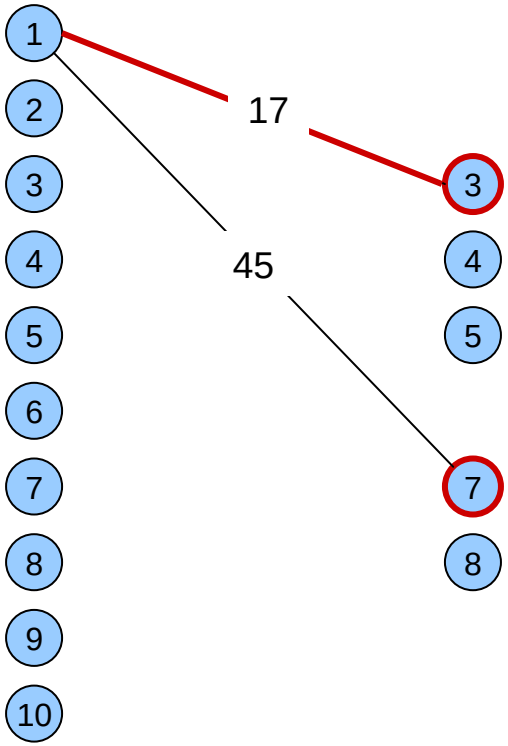
- Nel caso discreto, il problema è banale: ad es., data la matrice delle distanze dei punti di *V* (associati alle righe) dai punti di *N* (colonne), per la mediana basta scegliere una colonna i cui elementi hanno somma minima
- Il problema però si complica se possiamo aprire più di un servizio
- Chiaramente, il valore della soluzione ottima decresce all'aumentare del numero dei centri di servizio aperti: al limite, aprendo un centro in ogni località si avrebbe un costo complessivo nullo
- Soddisfare la domanda al costo minimo aprendo fino a *p* servizi costituisce
  - nel caso min-sum un problema di *p*-mediana
  - nel caso min-max un problema di *p*-centro

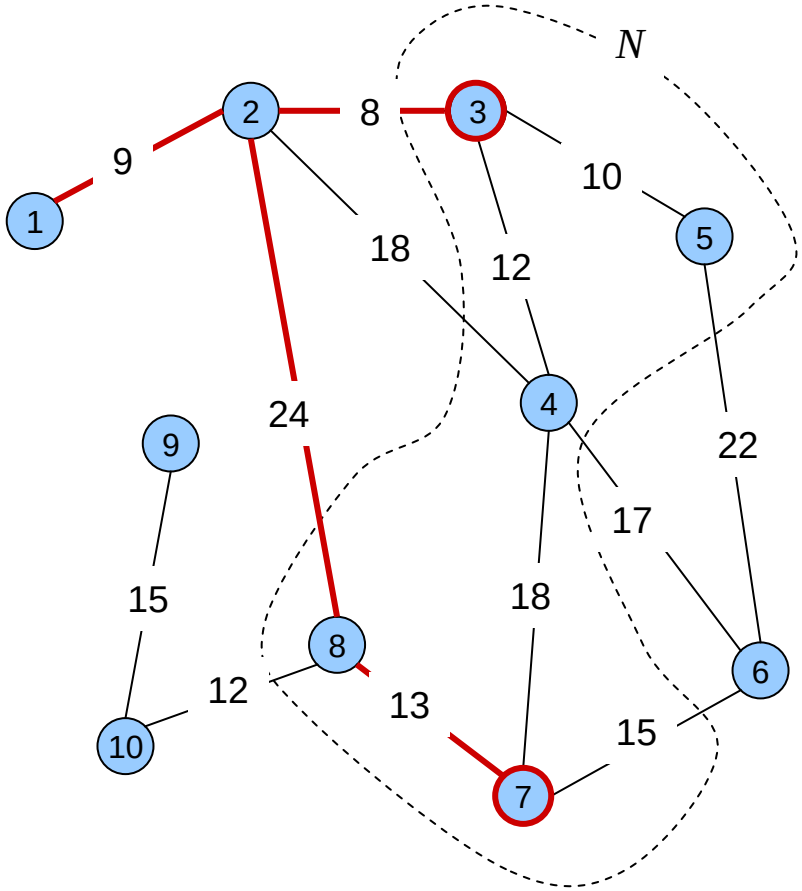


sum = 148, max = 27 (nodi 1 e 9)

2. *p*-mediana e *p*-centro

Proprietà 1 Una volta decisa la localizzazione dei servizi, la soluzione ottima assegna ciascun cliente al centro più vicino

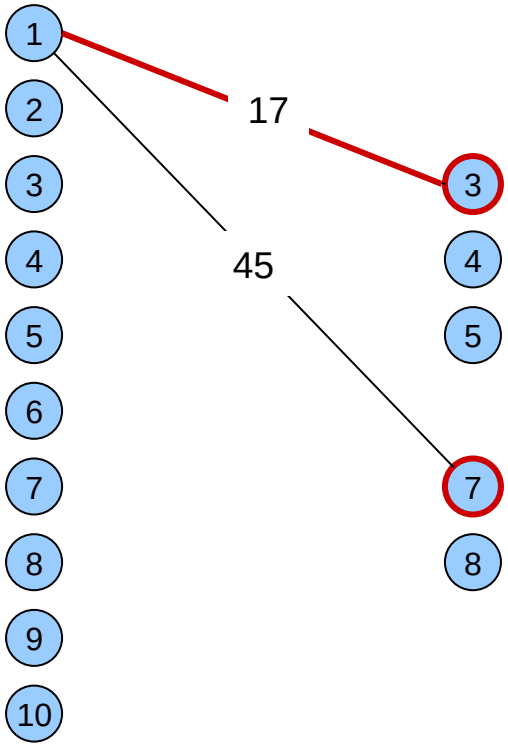




sum = 148, max = 27 (nodi 1 e 9)

2. *p*-mediana e *p*-centro

Proprietà 1 Una volta decisa la localizzazione dei servizi, la soluzione ottima assegna ciascun cliente al centro più vicino

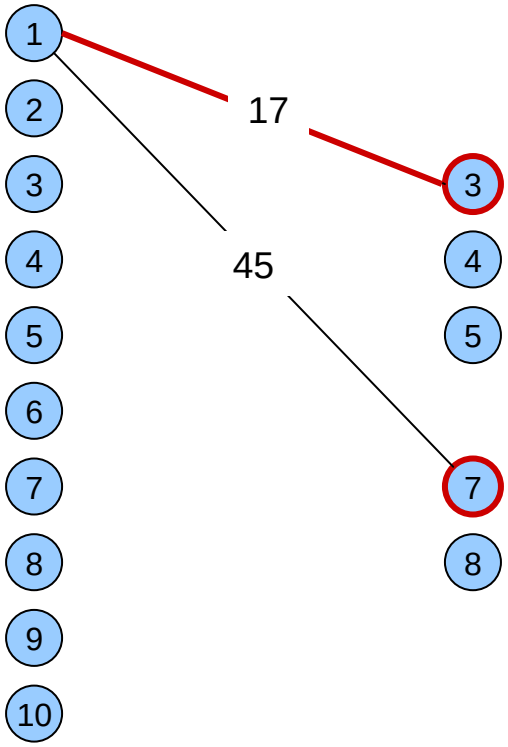


Questa proprietà, tipica di problemi senza un limite di capacità sui link (problemi con capacitatà illimitata), focalizza l'attenzione sul problema di decidere quali siano i centri aperti

- Fra n località, le possibili scelte sono in tutto $\binom{n}{p}$
- Quindi se p è piccolo si può pensare di risolvere il problema per enumerazione, risolvendo $\binom{n}{p}$ problemi di assegnamento con il metodo greedy
- Però già con $n = 100$ siti candidati e solo $p = 8$ centri da aprire, questo metodo richiederebbe 186.087.894.300 iterazioni

2. *p*-mediana e *p*-centro

- Si può allora ricorrere a una formulazione in termini di programmazione lineare 0-1



- Sia $x_j \in \{0, 1\}$ una variabile binaria che assume valore 1 se e solo se il sito j è scelto per aprire un centro di servizio
- Sia poi $x_{ij} \in \{0, 1\}$ una variabile binaria che assume valore 1 se e solo se il cliente nel sito i si serve dal centro localizzato in j
- Indicando con d_{ij} la distanza del sito i dal sito j, il problema di p-mediana si scrive

$$\min \quad \sum_{i,j} d_{ij} x_{ij}$$

$$\forall i \in V \quad \sum_{j} x_{ij} = 1 \quad \text{(ogni cliente è servito)}$$

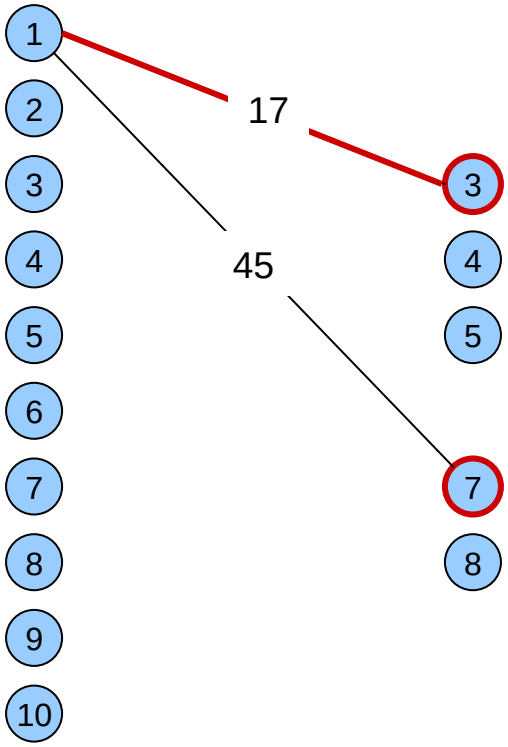
$$\forall i, j \quad x_{ij} \leq x_j \quad \text{(attivazione del centro } j\text{)}$$

$$\sum_{j} x_j \leq p \quad \text{(ci sono al più } p \text{ centri)}$$

$$x_j, x_{ij} \in \{0, 1\} \ \forall \ i \in V, j \in N$$

2. *p*-mediana e *p*-centro

- Si può allora ricorrere a una formulazione in termini di programmazione lineare 0-1



- Sia $x_j \in \{0, 1\}$ una variabile binaria che assume valore 1 se e solo se il sito j è scelto per aprire un centro di servizio
- Sia poi $x_{ij} \in \{0, 1\}$ una variabile binaria che assume valore 1 se e solo se il cliente nel sito i si serve dal centro localizzato in j
- Indicando con d_{ij} la distanza del sito i dal sito j, il problema di p-centro si scrive

$$\min \quad d \geq d_{ij} x_{ij} \quad \forall i \in V, j \in N$$

$$\forall i \in V \quad \sum_j x_{ij} = 1 \quad \text{(ogni cliente è servito)}$$

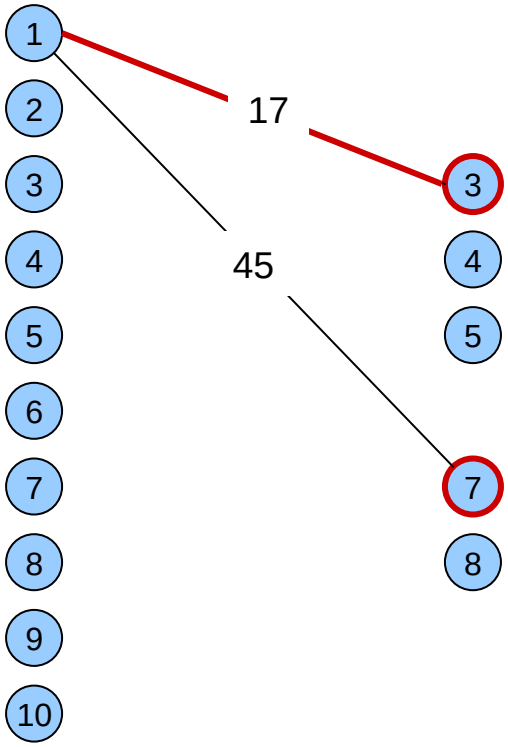
$$\forall i, j \quad x_{ij} \leq x_j \quad \text{(attivazione del centro } j\text{)}$$

$$\sum_j x_j \leq p \quad \text{(ci sono al più } p \text{ centri)}$$

$$x_j, x_{ij} \in \{0, 1\} \ \forall \ i \in V, j \in N$$

3. Localizzazione semplice

- La localizzazione semplice (*simple facility location*) è un modello lievemente differente



- In questo caso sia la realizzazione del centro nel sito *j* che il suo accesso da parte del nodo *i* sono soggetti a un costo, rispettivamente c_j e c_{ij}.
- I centri attivati rappresentano un costo, ma il loro numero non è esplicitamente limitato: il problema di localizzazione semplice si scrive quindi

$$\min \quad \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j} c_j x_j$$

$$\forall i \in V \quad \sum_{j} x_{ij} = 1 \quad \text{(ogni cliente è servito)}$$

$$\forall i, j \quad x_{ij} \leq x_j \quad \text{(attivazione del centro } j\text{)}$$

$$x_j, x_{ij} \in \{0, 1\} \; \forall \; i \in V, j \in N$$

4. Rilassamenti

Proprietà 2 Sia P un problema di *p*-mediana, *p*-centro o localizzazione semplice. Allora il problema ottenuto sostituendo il vincolo $x_{ij} \in \{0, 1\}$ con $x_{ij} \geq 0$ ammette la stessa soluzione ottima della formulazione originale di P.

Detta x_{ij}^*, x_j^* ($i \in V, j \in N$) una soluzione ottima intera della formulazione originale di P, sia $N^* = \{j \in N: x_j^* > 0\}$.

Si ha evidentemente $x_{ij}^* = 0$ per ogni $i \in V, j \notin N^*$.

La funzione obiettivo di P è in generale separabile in due contributi:

- $f(\mathbf{x})$, dovuto alle x_{ij}
- $c(\mathbf{x})$, dovuto alle x_j, con $c(\mathbf{x}) = 0$ nel caso di *p*-mediana o *p*-centro

Il problema

$$\min \quad f(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}^*)$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\, i \in V, j \in N^*$$

è un assegnamento e ammette come è noto soluzione ottima intera x_{ij}^* per $i \in V, j \in N^*$.

4. Rilassamenti

Proprietà 3 Rilasciando in modo lagrangiano il vincolo che limita a p il numero di centri aperti in un problema di p-mediana si ottiene un problema di localizzazione semplice.

Il rilassamento lagrangiano in questione si scrive

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = \min \sum_{i,j} d_{ij} x_{ij} + \lambda\left(\sum_{j} x_j - p\right)$$

$$\sum_{j} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V$$

$$x_{ij} \leq x_j \qquad \forall i, j$$

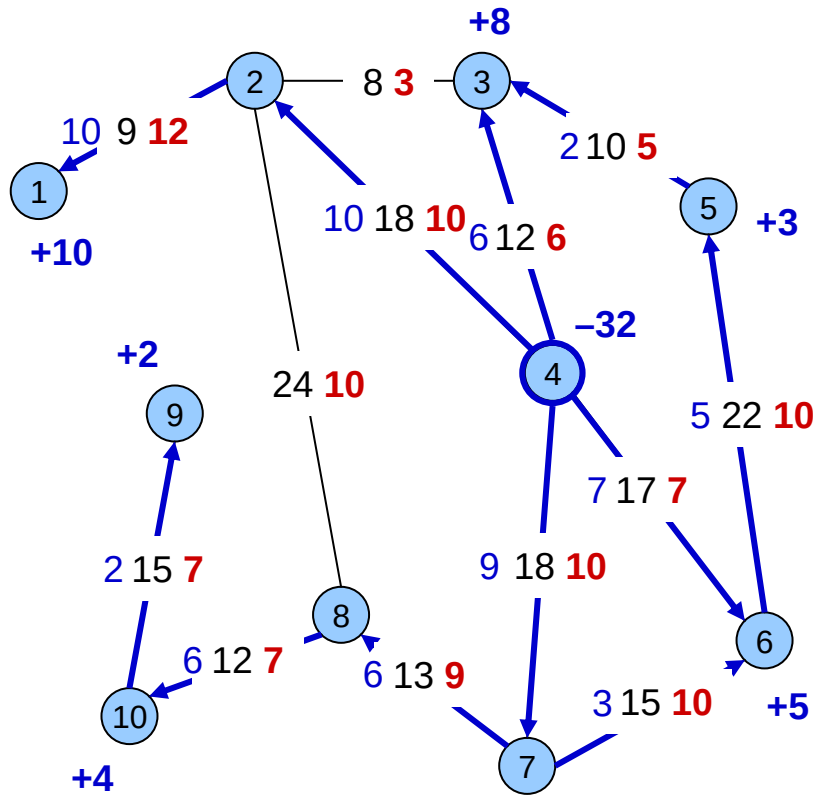
$$x_j \in \{0, 1\},\ x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i \in V,\ j \in N$$

e per ogni $\lambda \geq 0$ è chiaramente un problema di localizzazione semplice.

Osservazione La migliore limitazione inferiore al valore ottimo del problema di p-mediana che sia possibile ottenere con questo tipo di rilassamento si ricava risolvendo il duale lagrangiano $\max \{L(\mathbf{x}, \lambda): \lambda \geq 0\}$.

5. Problemi con capacità finita

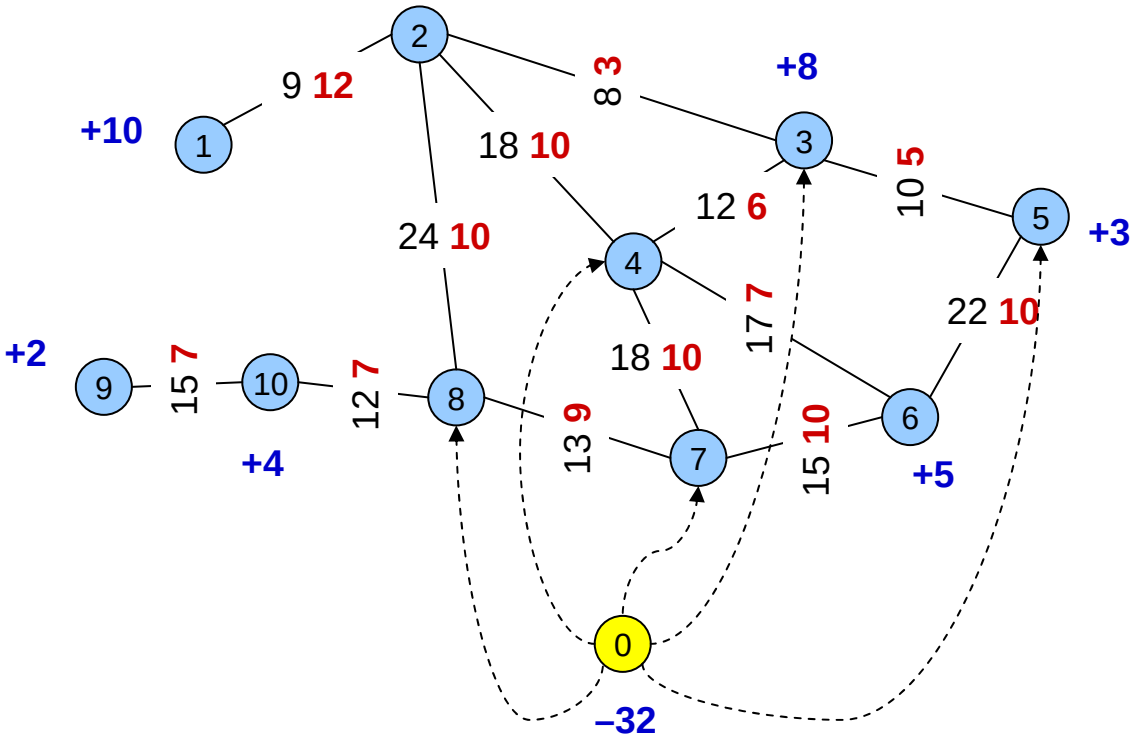
- Un caso più complesso è quello in cui occorra tenere conto del fatto che i collegamenti tra i nodi della rete hanno una capacità limitata
- In questo caso il cliente *i* desidera approvvigionarsi di una quantità $q_i \geq 0$
- Il flusso complessivo che attraversa il generico link tra il nodo *i* e il nodo *j* non può superare la capacità u_{ij} del link
- In generale, la Proprietà 1 perde di validità, in quanto un singolo cammino dal nodo *i* al nodo *j* potrebbe non avere capacità sufficiente per smistare tutto il traffico tra *i* e *j*
- La Proprietà 2 invece non si applica in quanto x_{ij} rappresenta un flusso ed è reale per definizione



- Tutte le proprietà dei problemi con capacità finita sono possedute dai problemi con capacità illimitata

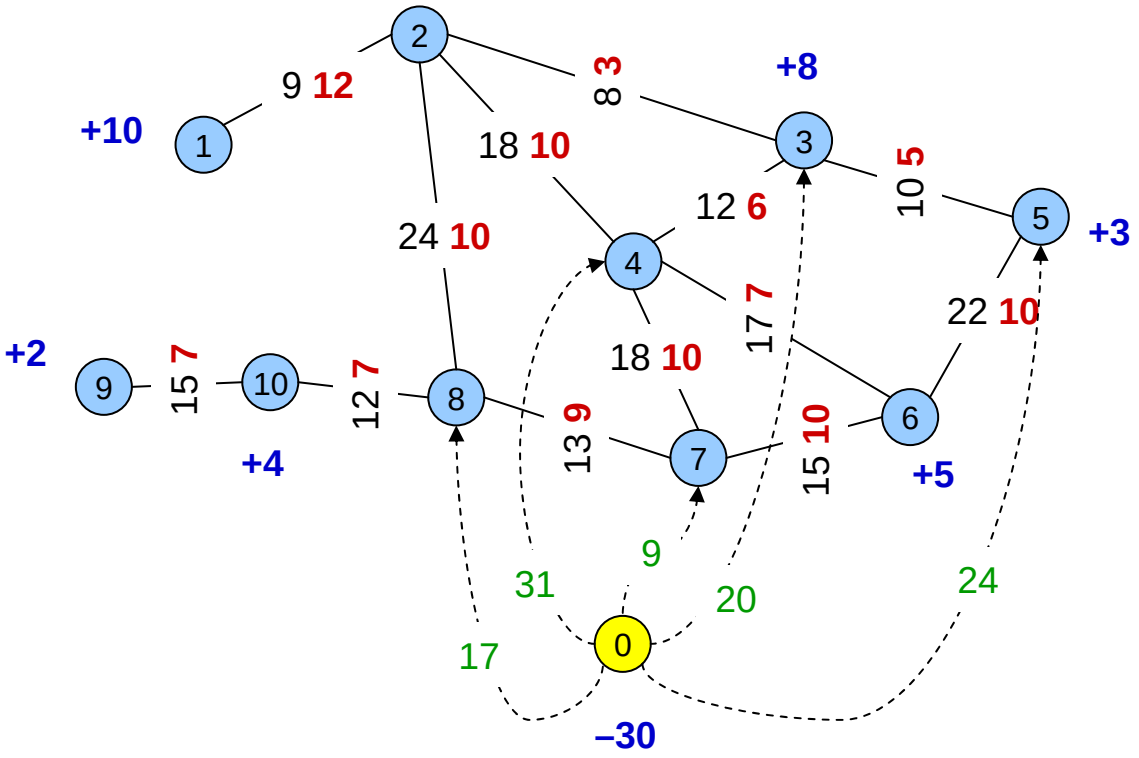
5. Problemi con capacità finita

- Il problema si può riformulare come flusso a costo minimo su una rete ottenuta da quella iniziale aggiungendo un nodo fittizio (il nodo 0) che funge da sorgente, e che fornisce alla rete una quantità di flusso $q_0 = -\Sigma\, q_i$ attraverso archi collegati ai nodi di N



5. Problemi con capacità finita

- Attraversare l'arco tratteggiato 0j, $j \in N$, comporta un costo fisso c_j.
  Il problema si formula attraverso variabili
  - $x_j \in \{0, 1\}$, che indicano se l'arco 0j è attraversato o no
  - $x_{ij} \in \mathrm{IR}_+$, che indicano il flusso in ogni arco $ij \in E$



5. Problemi con capacità finita

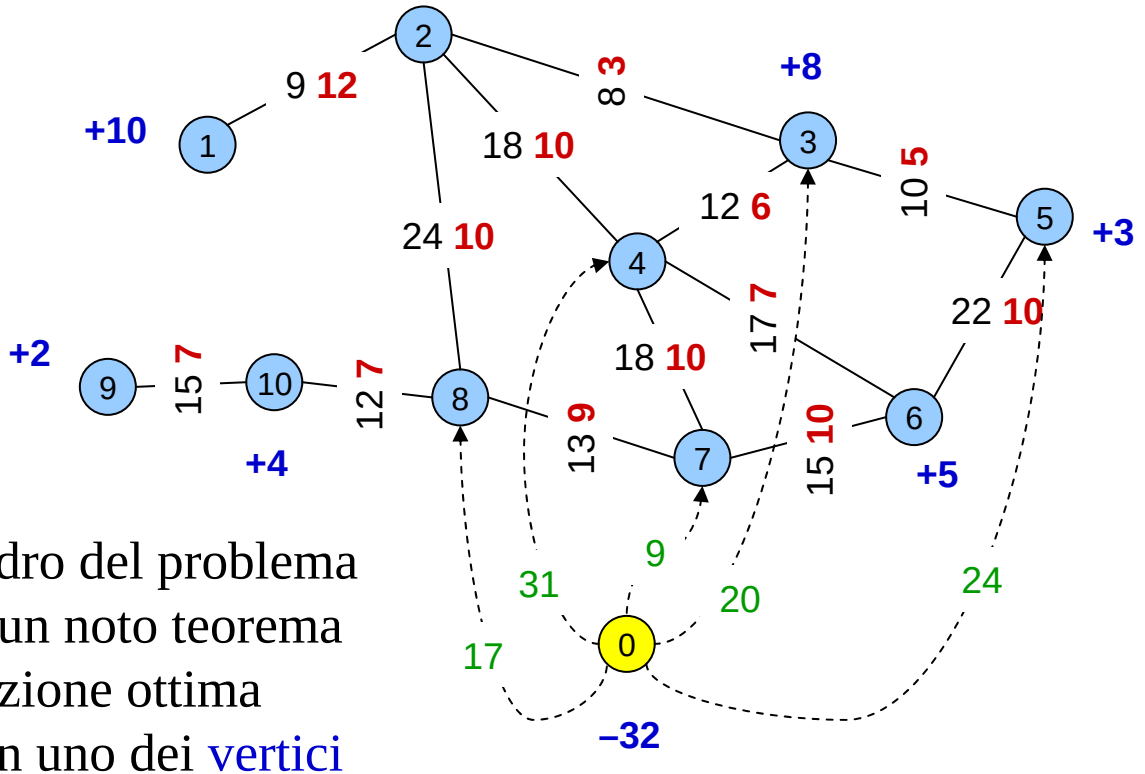
È un particolare problema di flusso a costo minimo con funzione costo concava

$$\min \quad \sum_{ij \in E} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} c_j x_j$$

$$\sum_{j:ij \in E} x_{ij} - \sum_{j:ji \in E} x_{ji} = q_i \qquad \forall i \in V$$

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \forall ij \in E$$

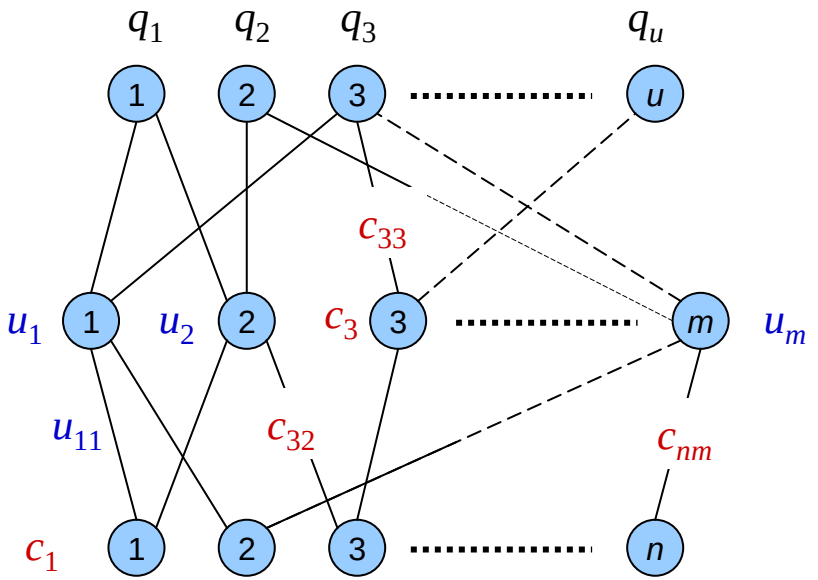
$$0 \le x_{0j} \le u x_j,\ x_j \in \{0, 1\} \qquad \forall j \in N$$



Poiché il poliedro del problema è limitato, per un noto teorema esiste una soluzione ottima coincidente con uno dei vertici

6. Problemi multilivello

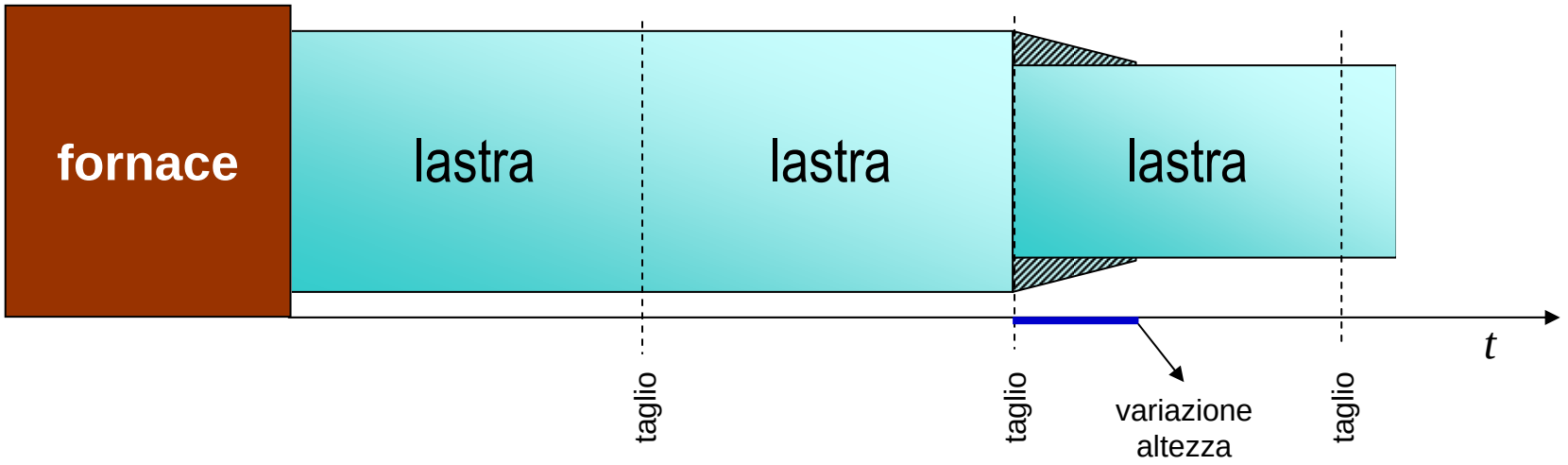
- Nelle applicazioni la rete logistica ha spesso una struttura stratificata, nella quale l'insieme dei punti di interesse è diviso in più parti
- Ad esempio:
  - L'insieme *U* dei clienti (*store*)
  - L'insieme *M* dei siti che possono accogliere un magazzino di distribuzione (*hub*)
  - L'insieme *N* dei siti che possono accogliere un impianto di produzione (*plant*)
- Problemi con questa struttura vengono detti multilivello (*multi-echelon*)



- Gli archi collegano strati consecutivi
- Nodi e archi sono in genere associati a
  - capacità limitate u_i, u_{ij}
  - costi di trasporto c_{ij} e di installazione c_i

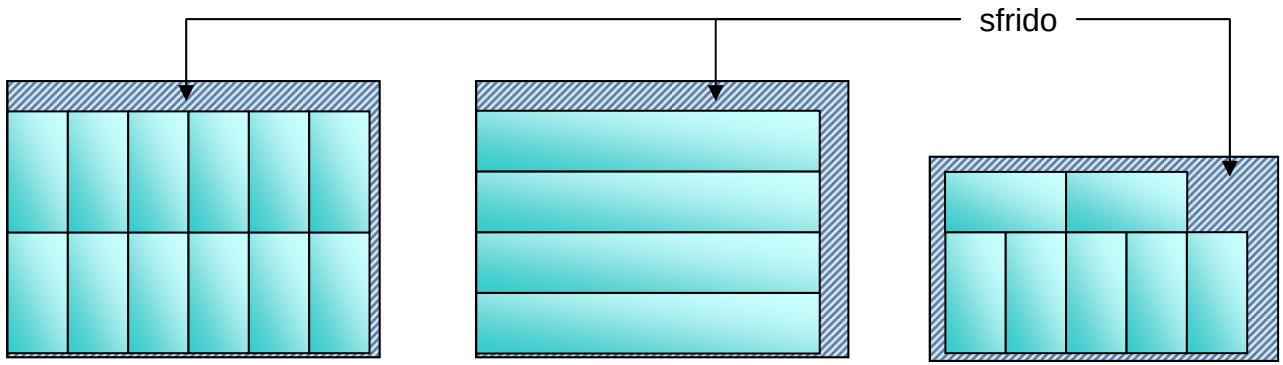
7. Un’applicazione industriale

- I modelli di localizzazione possono avere applicazioni anche lontane dalla logistica
- In un industria del vetro la produzione è organizzata in due fasi
  1. grandi lastre di vetro sono prodotte per fusione e inviate a un magazzino
  2. pannelli più piccoli sono ricavati tagliando successivamente lastre in modo da soddisfare una certa domanda



7. Un’applicazione industriale

- I modelli di localizzazione possono avere applicazioni anche lontane dalla logistica
- In un industria del vetro la produzione è organizzata in due fasi
  1. grandi lastre di vetro sono prodotte per fusione e inviate a un magazzino
  2. pannelli più piccoli sono ricavati tagliando successivamente lastre in modo da soddisfare una certa domanda



  - La gestione dei semilavorati richiede che da ogni lastra siano ottenuti pannelli di una *medesima grandezza*
  - La gestione economica, che lo *sfrido* sia ridotto al minimo
  - La gestione del magazzino che vi sia una *varietà limitata* di lastre di grandezza diversa

7. Un'applicazione industriale

Problema Produrre ogni pannello i nella quantità richiesta q_i

1. tagliando lastre di al più p grandezze diverse
2. minimizzando lo sfrido complessivo

- Sia L l'insieme delle grandezze di lastre fattibili, e per $S \subseteq L$ definiamo la variabile di decisione binaria

$$x_{iS} = \begin{cases} 1 & \text{se il pannello } i \text{ è tagliato da lastre di grandezze in } S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Indichiamo con c_{iS}^* lo sfrido che si produce tagliando nel miglior modo possibile tutti i pannelli di tipo i da lastre di grandezze in L

(per calcolare c_{iS}^* occorre risolvere un problema di cutting stock)

- Sia $x_k \in \{0, 1\}$ per $k \in L$

($x_k = 1$ indica che la dimensione k è tra quelle scelte)

$$\min \sum_i \sum_{S \subseteq L} c_{iS}^* x_{iS}$$

$$\sum_{S \subseteq L} x_{iS} = 1 \qquad \forall i$$

(ogni pannello è prodotto)

$$x_{iS} \leq x_k \qquad \forall iS, \forall k \in S$$

(se k è usata per produrre i, allora va contata)

$$\sum_k x_k \leq p \qquad x_k \in \{0, 1\}, x_{iS} \geq 0$$

7. Un'applicazione industriale

Problema Produrre ogni pannello i nella quantità richiesta q_i

1. tagliando lastre di al più p grandezze diverse
2. minimizzando lo sfrido complessivo

- La formulazione proposta ha un gran numero di variabili: $2^{|L|}$
- La si può semplificare limitando $|S|$, ad esempio fissando $|S| = 1$

$$\min \sum_i \sum_{k \in L} c_{ik}^* x_{ik}$$

$$\sum_{k \in L} x_{ik} = 1 \qquad \forall i$$

$$x_{ik} \le x_k \qquad \forall i, \forall k \in L$$

$$\sum_k x_k \le p \qquad x_k \in \{0, 1\}, x_{iS} \ge 0$$

p-mediana

- Le variabili x_{iS} diventano allora

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se il pannello } i \text{ è tagliato da lastre di grandezza } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \sum_i \sum_{S \subseteq L} c_{iS}^* x_{iS}$$

$$\sum_{S \subseteq L} x_{iS} = 1 \qquad \forall i$$

(ogni pannello è prodotto)

$$x_{iS} \le x_k \qquad \forall iS, \forall k \in S$$

(se k è usata per produrre i, allora va contata)

$$\sum_k x_k \le p \qquad x_k \in \{0, 1\}, x_{iS} \ge 0$$

7. Un'applicazione industriale

Problema Produrre ogni pannello i nella quantità richiesta q_i

1. tagliando lastre di al più p grandezze diverse
2. minimizzando lo sfrido complessivo

- La formulazione proposta ha un gran numero di variabili: $2^{|L|}$
- La si può semplificare limitando $|S|$, ad esempio fissando $|S| = 1$

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se il pannello } i \text{ è tagliato da lastre di grandezza } k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\min \sum_i \sum_{k \in L} c_{ik}^* x_{ik}$$

$$\sum_{k \in L} x_{ik} = 1 \qquad \forall i$$

$$x_{ik} \le x_k \qquad \forall i, \forall k \in L$$

$$\sum_k x_k \le p \qquad x_k \in \{0, 1\},\ x_{iS} \ge 0$$

p-mediana

Risolvendo si ottiene una soluzione ammissibile (in pratica molto buona, anche se non necessariamente ottima) nella quale ogni pannello è ottenuto da lastre di una sola grandezza