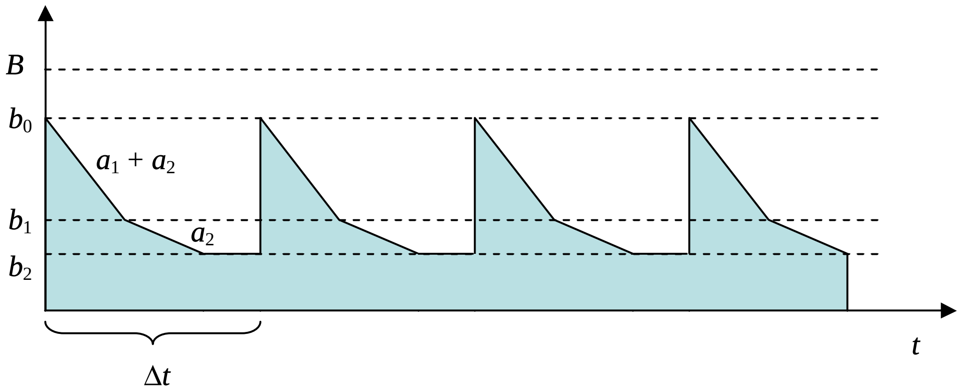
**GESTIONE DELLA LOGISTICA E DELLA PRODUZIONE INTEGRATA**
**prova scritta del 16 febbraio 2006**

## Gazprom

In due processi di trasformazione $P_1$, $P_2$ un impianto chimico utilizza un certo gas del quale si rifornisce periodicamente tramite un treno cisterna. Il gas viene stoccato in un serbatoio dal quale i processi attingono con tassi di assorbimento costanti pari rispettivamente ad $a_1$, $a_2$ litri/minuto. Il processo $P_i$ può tuttavia attingere al serbatoio purché la pressione del gas non sia inferiore a un certo valore $p_i$, avendosi in particolare $p_1 > p_2$. Dal canto suo, il valore della pressione $p(t)$ in un determinato istante $t$ è direttamente proporzionale al quantitativo di gas $b(t)$ (in litri) presente nel serbatoio in quell'istante secondo una certa costante κ: $p(t) = \kappa b(t)$. In altri termini, la pressione diminuisce man mano che la scorta di gas nel serbatoio diminuisce per via dell'assorbimento, e, se non si interviene con un rifornimento, a un certo istante $P_1$ (ed eventualmente, in successione, $P_2$) cesserà il proprio assorbimento.
Tenendo conto che:

1. ogni rifornimento di gas costa $s_0$ €, indipendentemente dalla quantità trasportata;
2. ogni minuto di giacenza di un litro di gas costa $g_0$ €;
3. ogni ettolitro di gas utilizzato nel primo (nel secondo) processo rende $c_1$ (rende $c_2$) €;
4. il serbatoio può contenere fino a $B$ ettolitri di gas;

si vuole stabilire una politica di rifornimento periodica ottimale da applicare in un orizzonte temporale di $T >> \Delta t$ ore, supponendo $p_1 = 2500$ bar, $p_2 = 1300$ bar, $\kappa = 2{,}5 \cdot 10^{-1}$ bar/litro, $a_1 = 6$ litri/minuto, $a_2 = 4$ litri/minuto, $s_0 = 1.000$ €, $c_1 = 2.500$ €, $g_0 = 0{,}02$ €/litro·minuto, $B = 125$ ettolitri.




Si calcoli tale politica nell'ipotesi che il periodo $\Delta t$ sia scelto in modo da coincidere con l'istante in cui la pressione del gas assume il valore $p_2$.

## Soluzione

Una politica di rifornimento periodica con periodo $\Delta t$ applicata a un orizzonte temporale di $T$ ore comporta tre voci di costo:

1. il costo di rifornimento, pari a
2. il costo di giacenza
3. il costo derivato da un'eventuale mancata produzione

Il costo di rifornimento è dato da

$$s(\Delta t) \;=\; s_0 T/\Delta t \;=\; 10^3 T/\Delta t \qquad (1)$$

Il costo di giacenza dipende in modo discontinuo dal periodo $\Delta t$. Ipotizzando infatti un rifornimento che al tempo $t = 0$ porti il contenuto del serbatoio al livello $b_0$, si indichi con $t_i$ l'istante nel quale la scorta si è ridotta dal valore iniziale $b_0$ al valore $b_i = p_i/\kappa$ in corrispondenza al quale la pressione nel serbatoio vale $p_i$: si ha evidentemente

$$b_1 \;=\; b_0 - (a_1 + a_2)t_1 \;=\; b_0 - 10t_1 \;=\; p_1/\kappa \;=\; 2500/0{,}25 \;=\; 10^4 \text{ litri}$$
$$b_2 \;=\; b_1 - a_2(t_2 - t_1) \;=\; b_1 - 4(t_2 - t_1) \;=\; p_2/\kappa \;=\; 1300/0{,}25 \;=\; 5{,}2\cdot 10^3 \text{ litri}$$

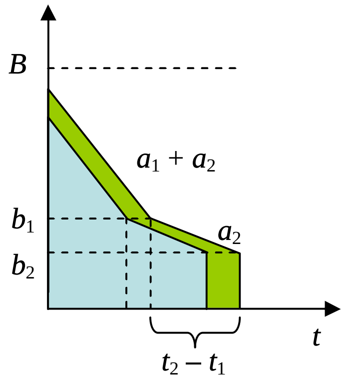
da cui

$$t_1 \;=\; \frac{b_0 - b_1}{a_1 + a_2} \;=\; 10^{-1}b_0 - 10^3 \text{ minuti}$$

$$t_2 - t_1 \;=\; \frac{b_1 - b_2}{a_2} \;=\; \frac{4800}{4} \;=\; 1{,}2\cdot 10^3 \text{ minuti} \;=\; 20 \text{ ore} \qquad (2)$$

$$t_2 \;=\; 10^{-1}b_0 + 2\cdot 10^2 \text{ minuti}$$

Come risulta dalla formula (2), i valori di $t_1$ e $t_2$ dipendono dalla scelta del livello di rifornimento e quindi da $b_0$; non così la loro differenza, che risulta costante al variare di $b_0$ (vedi figura):




Come è noto il costo complessivo di giacenza è proporzionale secondo $g_0$ all'integrale $I$ della curva del livello di scorta, il cui valore dipende da $b_0$ e $\Delta t$. Nel caso previsto dal testo si decide di scegliere $\Delta t = t_2$. L'integrale tra 0 e $\Delta t$ si può ottenere come somma dell'area di due trapezi rettangoli, e vale

$$I \;=\; ½\,[(b_1 + b_2)(t_2 - t_1) + (b_0 + b_1)t_1] \;=\; 9{,}12\cdot 10^6 + ½\,(b_0 + 10^4)(0{,}1b_0 - 10^3) \;=$$
$$=\; 0{,}05b_0^2 + 4{,}12\cdot 10^6 \qquad \text{(litri·minuti)}$$

Il costo di giacenza è quindi dato da

$$g(b_0, \Delta t) \;=\; [0{,}05b_0^2 + 4.120.000]\cdot\, g_0T/\Delta t$$

Dalla (2) ricaviamo $b_0$ in funzione di $\Delta t = t_2$

$$b_0 = 10\Delta t - 2000$$

e sostituiamo nella precedente relazione, ottenendo finalmente:

$$g(\Delta t) \;=\; [5\Delta t^2 - 2000\Delta t + 8.120.000]\cdot\, g_0T/\Delta t \;=\; T\,[0{,}1\Delta t - 40 + 162.400/\Delta t] \qquad (3)$$

Infine osserviamo che scegliendo il periodo pari a $\Delta t$ implicitamente rinunciamo alla produzione del processo $P_1$ per complessive $(t_2 - t_1)T/\Delta t = 20T/\Delta t$ ore. Poiché $P_1$ assorbe $a_1 = 6$ litri/minuto = 3,6 ettolitri/ora di gas, gli ettolitri non trasformati ammontano a $72T/\Delta t$, e siccome ogni ettolitro di gas rende $c_1 = 2500$ €, tale scelta corrisponde a un mancato introito di

$$c(\Delta t) \;=\; 180.000\; T/\Delta t \qquad (4)$$

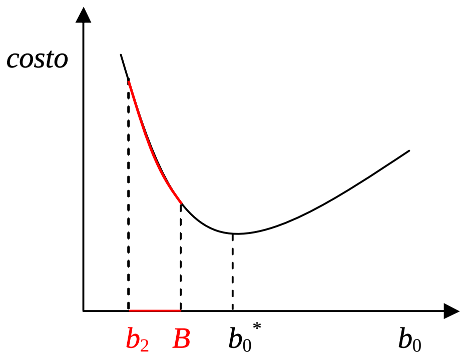
Sommando la (1), la (3) e la (4) si ottiene il costo della politica di gestione in funzione di $\Delta t$.

$$C(\Delta t) \;=\; s(\Delta t) + g(\Delta t) + c(\Delta t) \;=\; T\,[0{,}1\Delta t - 40 + 342.400/\Delta t] \qquad (5)$$

Questa funzione ha un unico punto di minimo in corrispondenza del valore $\Delta t^*$ che ne annulla la derivata prima:

$$C'(\Delta t) = T(0{,}1 - 342.400/\Delta t^2) = 0 \qquad \Delta t^* \cong 1.850{,}4 \text{ minuti}$$

Applicando la (2) a questo valore si ottiene $b_0^* = 10\Delta t^* - 2000 = 16.504$ litri. Il valore di $b_0^*$ ottenuto risulta maggiore della capacità del serbatoio ($B$ = 12.500 litri), ed è dunque incompatibile con le ipotesi fatte. L'andamento della funzione costo in funzione di $b_0$ è qualitativamente riassunto nella figura seguente.




Come si vede, la funzione è monotona decrescente nell'intervallo [$b_2$, $B$], dunque il punto di minimo corrisponde al valore $b_0 = B$. In definitiva, si deciderà di rifornirsi di $B - b_2$ = 7.300 litri di gas ogni $\Delta t = t_2 = 0{,}1B + 200$ = 1.450 minuti (poco più di 24 ore).