

Cognome:

Nome:

Matricola: _____

Rispondere alle seguenti domande marcando a penna la lettera corrispondente alla risposta ritenuta corretta (una sola tra quelle riportate). Una risposta esatta vale 2 punti, una sbagliata -1 punto.

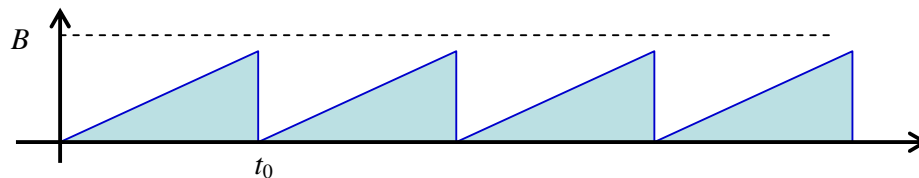
1. I valori delle variabili di stato di un sistema discreto cambiano in corrispondenza di istanti di tempo che definiscono un insieme
[A] al più finito
[B] al più continuo
[C] al più infinito
2. Se $E(X)$ indica il valor medio di una variabile aleatoria X , la varianza $V(X)$ è:
[A] $E(X^2) - [E(X)]^2$
[B] $E(X - [E(X)]^2)$
[C] $[E(X - E(X))]^2$
3. Un modello di simulazione discreto
[A] non può essere utilizzato per simulare un sistema statico
[B] non può essere utilizzato per simulare un sistema senza elementi di natura aleatoria
[C] può essere utilizzato per simulare un sistema continuo
4. Un sistema di servizio M/M/1 è in stato stazionario quando
[A] il servente opera con un tempo di servizio costante
[B] i clienti arrivano a intervalli regolari
[C] la probabilità che nel sistema ci siano n clienti non dipende dal tempo
5. L'economia italiana dall'Unità a oggi è caratterizzata da una forte polarizzazione, cioè
[A] da una notevole specializzazione tecnologica
[B] dalla presenza di relativamente poche medie imprese
[C] da una rimarchevole tendenza al protezionismo economico
6. In un modello di Leontiev, i quantitativi x_j di beni j prodotti in un sistema aperto in un certo periodo e le quantità a_{ij} di prodotto i necessarie alla fabbricazione di un'unità di prodotto j sono nella relazione
[A] $x_j = b_j + a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{nj}x_n$
[B] $x_j = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{nj}x_n$
[C] $x_j = b_j + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n$
7. Frederick Taylor gettò le basi
[A] della moderna macroeconomia
[B] della scienza dell'organizzazione
[C] dell'analisi delle dipendenze intersettoriali

Cognome:

Nome:

Matricola: _____

Si consideri un processo industriale che produce un singolo prodotto. Il prodotto, fabbricato a un tasso di produzione costante e pari ad a_0 , viene accumulato in un magazzino di uscita, sia $b(t)$ la quantità accumulata all'istante t .



La gestione della produzione comporta costi

- di giacenza: un'unità di prodotto ferma per un'unità di tempo in magazzino comporta un costo g_0 ;
- di spedizione: spedire una quantità b di prodotto comporta un costo $s(b) = 0$ se $b = 0$, $s(b) = ks_0$ se $(k-1)q < b \leq kq$, con q costante nota e $k = 1, 2, \dots$

Volendo adottare in un orizzonte temporale lungo T una politica di spedizione periodica con periodo fisso t_0 e senza scorta di sicurezza, qual è il valore di tale periodo che permette di minimizzare il costo di gestione complessivo? Si descriva un procedimento di calcolo e lo si applichi nel caso in cui:

$a_0 = 20$ ettolitri/giorno, $g_0 = 2$ €, $s_0 = 500$ €, $q = 100$ ettolitri e il magazzino di uscita può contenere fino a $B = 330$ ettolitri.

Soluzione

Supponiamo che all'istante $t = 0$ il magazzino sia vuoto ($b(0) = 0$). Dopo t unità di tempo, se non avvengono spedizioni, il livello di magazzino sarà pari ad $a_0 t$. Se al tempo t_0 si ha una spedizione, la giacenza media nel periodo sarà pari a $\frac{1}{2} a_0 t_0^2$. Dunque il costo di giacenza per T/t_0 spedizioni nell'orizzonte temporale sarà

$$g(t_0) = \frac{1}{2} g_0 a_0 T t_0$$

Per quanto riguarda il costo di spedizione, esso dipenderà dalla quantità $b(t_0)$ spedita ogni t_0 unità di tempo. Poiché $b(t_0) = a_0 t_0$, il costo di spedizione potrà scriversi:

$$s(t_0) = T k s_0 / t_0 \quad \text{se } (k-1)q/a_0 < t_0 \leq kq/a_0$$

Il costo complessivo è una funzione con un numero finito di punti di discontinuità:

$$c(t_0) = \frac{1}{2} T (g_0 a_0 t_0 + 2 k s_0 / t_0) \quad \text{se } (k-1)q/a_0 < t_0 \leq kq/a_0$$

In ciascun tratto di continuità la derivata della funzione costo vale

$$c'(t_0) = \frac{1}{2} T (g_0 a_0 - 2 k s_0 / t_0^2) \quad \text{se } (k-1)q/a_0 < t_0 \leq kq/a_0$$

e si annulla per:

$$t_0^*(k) = \sqrt{2 k s_0 / g_0 a_0}$$

Se tale valore si trova nell'intervallo $((k-1)q/a_0, kq/a_0]$ (aperto a sinistra) allora è un punto di minimo locale della funzione costo. Per determinare il punto di minimo globale bisogna quindi confrontare i punti $t_0^*(k)$ con i punti kq/a_0 , per $k = 1, 2, \dots$

La necessità di attuare politiche di spedizione prive di scorta di sicurezza implica che ogni spedizione svuoti il magazzino. Nel caso in esame, siccome la capacità del magazzino è limitata a $B = 330$ ettolitri il massimo valore ammissibile per t_0 è $t_0^{\max} = B/a_0 = 330/20 = 16,5$, e k assume solo i valori 1, 2, 3, 4. Sostituendo i valori proposti si ha $t_0^*(k) = 5\sqrt{k}$, quindi l'insieme degli zeri della derivata è

$$Z = \{5, 5\sqrt{2}, 5\sqrt{3}, 10\}$$

D'altra parte l'insieme dei punti di discontinuità $t_0(k) = kq/a_0$ è

$$D = \{5, 10, 15, 20\}$$

Osserviamo che i punti $t_0^*(1)$ e $t_0^*(2)$ cadono all'interno degli intervalli di continuità $(0, 5]$, $(5, 10]$. I punti $t_0^*(3)$ e $t_0^*(4)$ invece non appartengono agli intervalli di continuità $(10, 15]$ e $(15, 16,5]$ e quindi vanno esclusi. In conclusione l'insieme dei candidati minimi locali è dato da

$$L = \{t_0^*(1), t_0^*(2), t_0(3), t_0^{\max}\} = \{5, 5\sqrt{2}, 15, 16,5\}$$

Tabulando su questi valori la funzione costo

$$c(t_0) = \frac{1}{2} T (g_0 a_0 t_0 + 2 k s_0 / t_0) = (20 t_0 + 500 k / t_0) T$$

si ottiene

k	t_0	$c(t_0)$
1	5	$200T$
2	$5\sqrt{2}$	$200T\sqrt{2}$
3	15	$400T$
4	16,5	$\approx 451,21T$

e si conclude quindi che il periodo di spedizione ottimale è $t_0^* = 5$ giorni.