GESTIONE DELLA LOGISTICA E DELLA PRODUZIONE
prova scritta del 12 dicembre 2005

Una delle tre

Nella gestione aperiodica delle scorte di una fabbrica di liquirizia, siano

- b_t il livello di scorta
- x_t il livello di produzione

del giorno t. Consideriamo i seguenti casi

1. la domanda a_t consiste in componenti di lunghezza fissa $l = 7$ ritagliati da semilavorati di lunghezza fissa $L = 50$:

giorno	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
domanda	50	60	50	85	20

2. la domanda consiste nei soli semilavorati, ma proviene da due clienti diversi:

giorno	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
domanda cliente 1	40	30	10	25	20
domanda cliente 2	15	45	20	25	10

3. la domanda consiste nei soli semilavorati, ma un fenomeno di deperimento fa sì che ogni giorno si perda una frazione d (pari al 2%) del materiale prodotto e/o immagazzinato:

giorno	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
domanda	50	60	50	85	20

Tenendo conto che il costo di produzione (di giacenza) è pari a 10€ (a 1€) per ogni semilavorato utilizzato (immagazzinato per un giorno), si discutano i tre casi indicando in quali di essi è possibile soddisfare la domanda minimizzando i costi complessivi tramite il metodo di Wagner-Whitin. Si risolva almeno uno dei casi in cui ciò è possibile, supponendo $b_0 = 0$ e $a_t > 0$, $b_t \geq 0$ per $t = 1, 2, \ldots$

Soluzione

Caso 1. Non è possibile applicare il metodo di Wagner-Whitin in quanto il costo di produzione

$$P(x_t) \;=\; 10\lceil x_t/\lfloor L/l \rfloor\rceil$$

non è una funzione concava del livello di produzione x_t. Nel caso in esame, infatti, dal taglio di un semilavorato si ricavano fino a 7 componenti, ma il costo dipende dal numero di semilavorati mentre x_t è espresso in numero di componenti prodotti: così ad esempio per $x_t = 13$ e $x_t = 14$ il costo è il medesimo (servono infatti 2 componenti in entrambi i casi), ma per $x_t = 15$ il costo cresce (servono 3 componenti).

Caso 2. Il fatto che la domanda provenga da due clienti diversi non impedisce l'applicazione del metodo, in quanto entrambi i clienti richiedono il medesimo prodotto (semilavorati). Si può pertanto risolvere il problema relativamente alla domanda totale $a_t = a_t^1 + a_t^2$:

giorno	1	2	3	4	5
domanda cliente 1	40	30	10	25	20
domanda cliente 2	15	45	20	25	10
domanda totale	55	75	30	50	30

Riportiamo nella seguente tabella i costi da sostenere per produrre il fabbisogno dal giorno j (sulla riga) al giorno t (sulla colonna):

giorno	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
j = 1	550	1300	1600	2100	2400
j = 2	--	750	1050	1550	1850
j = 3	--	--	300	800	1100
j = 4	--	--	--	500	800
j = 5	--	--	--	--	300

Nella tabella che segue riportiamo invece la giacenza $b_j = a_{j+1} + \ldots + a_t$ che è necessario mantenere per soddisfare $a_{j+1}, \ldots, a_t$, e il costo $G(j, t) = G(b_j) + \ldots + G(b_{t-1})$ per mantenere la giacenza necessaria nei giorni da j fino a $t - 1$.

giorno	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
j = 1	75/75	105/135	155/285	185/405
j = 2	--	30/30	80/130	110/220
j = 3	--	--	50/50	80/110
j = 4	--	--	--	30

Riportiamo infine nella tabella che segue il costo complessivo $C(j, t) = P(x_j) + G(j, t)$ per produrre nel giorno j e successivamente mantenere in giacenza quanto richiesto nei giorni $j, \ldots, t$:

giorno	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
J = 1	550	1375	1735	2385	2805
J = 2	--	750	1080	1680	2070
J = 3	--	--	300	850	1210
j = 4	--	--	--	500	830
j = 5	--	--	--	--	300

Posto $c_0 = 0$, applichiamo a questo punto la formula di ricorrenza $c_t = \min_{j=1\ldots t}\{c_{j-1} + C(j, t)\}$:

$c_1 \;=\; 550$ produrre nel giorno 1

$c_2 \;=\; \min\{1375, 550+750\} \;=\; 1300$ produrre nei giorni 1 e 2

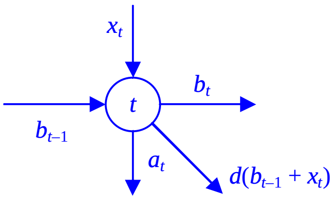
$c_3 \;=\; \min\{1735, 550+1080, 1300+300\} \;=\; 1600$ produrre nei giorni 1, 2 e 3

$c_4 \;=\; \min\{2385, 550+1680, 1300+850, 1600+500\} \;=\; 2100$ produrre nei giorni 1, 2, 3 e 4

$c_5 \;=\; \min\{2805, 550+2070, 1300+1210, 1600+830, 2100+300\} \;=\; 2400$ produrre nei giorni 1, 2, 3, 4 e 5

La soluzione ottima consiste nel produrre ogni giorno esattamente quanto richiesto dal cliente.

Caso 3. Come illustrato nel semplice diagramma qui riportato, il fenomeno di perdita dovuto a deperimento della merce sottrae una frazione d al totale prodotto ed ereditato dal magazzino nel giorno t.



La quantità b_t rappresenta quanto rimane in giacenza per il giorno successivo una volta detratto l'ammontare della domanda e della perdita. Le equazioni di stato si scrivono quindi:

$$(1 - d)(x_t + b_{t-1}) = a_t + b_t \qquad\qquad t = 1, \ldots, T$$

Posto $l = 1/(1 - d)$, $a_t' = a_t/(1 - d)$ il sistema si riscrive

$$x_t + b_{t-1} - l\,b_t = a_t' \qquad\qquad t = 1, \ldots, T$$

con $x_t \geq 0$, $b_t \geq 0$ per $t = 1, 2, \ldots, T$ e $b_0 = 0$ ([1]). L'insieme delle soluzioni del problema è quindi costituito da un poliedro limitato, ed essendo le funzioni costo lineari (e quindi concave), la soluzione ottima si trova su uno dei suoi vertici. Ponendo $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{2T-1}$, possiamo riscrivere il sistema in forma compatta:

$$\begin{aligned} \mathbf{Bz} &= \mathbf{a}' \\ \mathbf{z} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

con $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{T\times(2T-1)}$. Ogni vertice corrisponde a una soluzione ammissibile di base $\mathbf{z}$, e non più di T componenti di $\mathbf{z}$ possono assumere valore > 0. D'altronde, essendo $b_0 = 0$ e $b_t \geq 0$, $a_t > 0$ per $t > 0$, deve aversi:

$$x_1 \geq a_1' > 0 \qquad b_1 + x_2 = a_2' + l\,b_2 \geq a_2' > 0 \quad \ldots \qquad b_{t-1} + x_t = a_t' + l\,b_t \geq a_t' > 0$$

quindi in una soluzione ottima esattamente una tra b_{t-1} e x_t dev'essere > 0.
Le condizioni di applicazione del metodo di Wagner-Whitin sono insomma rispettate. La formula di ricorrenza va tuttavia modificata tenendo conto della quantità di scorta che si perde ogni giorno. La soluzione del caso in esame è lasciata per esercizio al lettore. Osserviamo a questo proposito che il costo di giacenza risulterà inferiore a quello che si ha in assenza di deperimento della merce, ma il deperimento comporterà ovviamente un maggior costo, corrispondente alla produzione dei semilavorati deperiti.

[1] In pratica, per soddisfare la domanda a_t e mantenere la giacenza al livello b_t occorre aumentare di un fattore l il complesso della produzione e della giacenza ereditata nel giorno t; ciò è equivalente a soddisfare una domanda fittizia a_t' e mantenere una giacenza fittizia $l\,b_t$ (entrambe aumentate rispetto ai valori effettivi).