GESTIONE DELLA LOGISTICA E DELLA PRODUZIONE
prova scritta del 22 marzo 2006

Si illustrano i procedimenti generali per entrambi i gruppi; i calcoli sono esplicitati con riferimento al solo gruppo A.

Problema 1

Determinare il periodo ottimale di approvvigionamento di una risorsa per un magazzino, sapendo che

1. il tasso di assorbimento della risorsa è di a_0 = 5,2 unità al giorno
2. si vuole operare con scorta di sicurezza nulla
3. la capacità del magazzino è di B = 49 unità
4. il costo di giacenza giornaliero di un'unità di risorsa è di g_0 = 0,50 €.
5. ogni spedizione al magazzino di $b_0 \leq 10$ unità di risorsa costa s_0 = 12 €.

In un orizzonte temporale di T giorni, il costo di giacenza associato a un periodo di rifornimento Δt è pari a

$$g(\Delta t) = g_0 T a_0 \Delta t = 2{,}6 T \Delta t$$

D'altra parte il costo di spedire $b_0 \leq B$ unità di risorsa ogni Δt giorni nell'orizzonte T è dato da

$$s(\Delta t) = k s_0 T/\Delta t = 12kT/\Delta t \qquad \text{per } 10(k-1) < b_0 \leq 10k$$

per k = 1, 2, …, 5 ($k \geq 6$ carichi in un giorno comporterebbero il superamento della capacità del magazzino).

Il costo complessivo di gestione è

$$c(\Delta t) = g(\Delta t) + s(\Delta t) = 0{,}2T(13\Delta t + 60k/\Delta t)$$

Annullandone la derivata fatta rispetto a Δt si ottiene

$$13\Delta t^2 = 60k \quad \text{verificata per} \quad \Delta t^* = \sqrt{60k/13}$$

Al variare di k si ottengono i seguenti valori di Δt^*:

	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
Δt^*	2,15	3,04	3,72	4,30	4,80
$b_0 = a_0\Delta t^*$	11,18	15,81	19,34	22,36	24,96
per b_0 in	(0, 10]	(10, 20]	(20, 30]	(30, 40]	(40, 49]

L'ultima riga della tabella riporta il fatto che la quantità b_0 corrispondente a un certo valore di k deve rispettare $10(k - 1) < b_0 \leq 10k$: ne segue che, tra quelli calcolati annullando la derivata, l'unico Δt^* ammissibile corrisponde a k = 2. Per k = 1, 3, 4, 5 la soluzione ottima consiste nello spedire rispettivamente b_0 = 10, 30, 40, 49 unità di risorsa con periodo b_0/a_0 = 1,92, 5,77, 7,69, 9,42. Il costo corrispondente è riportato di seguito

	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k = 5
Δt	1,92	3,04	5,77	7,69	9,42
$c(\Delta t)/T$	11,24	15,80	21,24	26,24	30,86

Il costo minimo corrisponde alla scelta Δt = 1,92 giorni, che pertanto è quella ottima (ancorché verosimilmente priva di senso pratico …).

Problema 2

Si consideri una sistema di produzione rivolto a soddisfare la domanda (di un singolo prodotto) riportata nella seguente tabella

mese	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
domanda	53	64	22	48	81	84	79	70	80	25	16	18

Ipotizzando un costo di giacenza medio mensile di 0,60 € per unità prodotta e un costo di produzione (in € per unità di prodotto) come da tabella seguente

mese	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
costo di produzione	1,20	1,10	0,90	0,95	1,10	1,20	1,10	1,00	0,80	0,80	0,80	0,70

si calcoli un piano di produzione che soddisfi la domanda al costo complessivo minimo, tenendo conto che la produzione dell'impianto non può superare le 160 unità mensili.

La produzione necessaria nel mese i per soddisfare la domanda dal mese i al mese t è riportata nella tabella seguente, dove si tiene conto del limite massimo di produzione mensile dell'impianto:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	53	117	139									
2		64	86	134								
3			22	70	151							
4				48	129							
5					81							
6						84						
7							79	149				
8								70	150			
9									80	105	121	139
10										25	41	59
11											16	34
12												18

La tabella successiva mostra invece il costo di ciascuna produzione volta a soddisfare la domanda dei mesi da i (riga) a t (colonna):

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	63,60	140,40	166,80									
2		70,40	94,60	147,40								
3			19,80	63,00	135,90							
4				45,60	122,55							
5					89,10							
6						100,80						
7							86,90	163,90				
8								70,00	150,00			
9									64,00	84,00	96,80	111,20
10										20,00	32,80	47,20
11											12,80	27,20
12												12,60

Il costo di giacenza per una produzione che copra i mesi da i a t vale $0{,}60 \cdot (a_{i+1} + 2a_{i+2} + \ldots + (t - i)a_t)$. Il calcolo fornisce, per i gruppi di mesi significativi

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		38,40	51,60									
2			13,20	42,00								
3				28,80	77,40							
4					48,60							
5												
6												
7								42,00				
8									48,00			
9										15,00	24,60	35,40
10											9,60	20,40
11												10,80
12												

Sommando i valori delle due tabelle si ottengono i costi complessivi $C(i, t)$:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	63,60	178,80	218,40									
2		70,40	107,80	189,40								
3			19,80	91,80	213,30							
4				45,60	171,15							
5					89,10							
6						100,80						
7							86,90	205,90				
8								70,00	198,00			
9									64,00	99,00	121,40	146,60
10										20,00	42,40	67,60
11											12,80	38,00
12												12,60

Applicando ora la formula di ricorrenza che esprime il costo c_k di una soluzione ottima che copra la domanda dei mesi da 1 a k, possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \boldsymbol{C(1, 1)} && = 63{,}60 \\
c_2 &= \min\{C(1, 2),\ \boldsymbol{c_1 + C(2, 2)}\} && = 134{,}00 \\
c_3 &= \min\{C(1, 3),\ c_1 + C(2, 3),\ \boldsymbol{c_2 + C(3, 3)}\} && = 153{,}80 \\
c_4 &= \min\{c_1 + C(2, 4),\ c_2 + C(3, 4),\ \boldsymbol{c_3 + C(4, 4)}\} && = 199{,}40 \\
c_5 &= \min\{c_2 + C(3, 5),\ c_3 + C(4, 5),\ \boldsymbol{c_4 + C(5, 5)}\} && = 288{,}50 \\
c_6 &= \boldsymbol{c_5 + C(6, 6)} && = 389{,}30 \\
c_7 &= \boldsymbol{c_6 + C(7, 7)} && = 476{,}20 \\
c_8 &= \min\{c_6 + C(7, 8),\ \boldsymbol{c_7 + C(8, 8)}\} && = 546{,}20 \\
c_9 &= \min\{c_7 + C(8, 9),\ \boldsymbol{c_8 + C(9, 9)}\} && = 610{,}20 \\
c_{10} &= \min\{c_8 + C(9, 10),\ \boldsymbol{c_9 + C(10, 10)}\} && = 630{,}20 \\
c_{11} &= \min\{c_8 + C(9, 11),\ c_9 + C(10, 11),\ \boldsymbol{c_{10} + C(11, 11)}\} && = 643{,}00 \\
c_{12} &= \min\{c_8 + C(9, 12),\ c_9 + C(10, 12),\ c_{10} + C(11, 12),\ \boldsymbol{c_{11} + C(12, 12)}\} && = 655{,}60
\end{aligned}
$$

Come si vede il piano di produzione ottimo non prevede la creazione di alcuna giacenza di prodotto.

Problema 3

Formulare come programmazione lineare il problema di determinare il piano di produzione del Problema 2 nel caso sia possibile incrementare la produzione giornaliera fino a ulteriori 40 unità con un costo aggiuntivo pari al 30% del costo giornaliero di produzione.

Si indichi con $x_t = u_t + w_t$ la produzione del mese t, dove u_t rappresenta la produzione ordinaria e w_t l'incremento ottenuto con un costo aggiuntivo. Si ha

(1) $0 \leq u_t \leq 160 \qquad 0 \leq w_t \leq 40 \qquad t = 1, \ldots, 12$

Sia inoltre b_t il livello di scorta mantenuto dal mese t al mese $t + 1$. Per definizione:

(2) $b_{t-1} + u_t + w_t = a_t + b_t \qquad b_t \geq 0 \qquad t = 1, \ldots, 12$

dove $b_0 = 0$ e a_t rappresenta la domanda di prodotto nel mese t (i cui valori sono desunti dalla prima tabella del Problema 2).
Il costo complessivo di gestione è dato dalla somma dei costi di produzione e di giacenza, e vale

(3) $c(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{b}) =$

$$= 1{,}20u_1 + 1{,}10(u_2 + u_5) + 0{,}90u_3 + 0{,}95u_4 + 1{,}20u_6 + 1{,}10u_7 + \mathrm{u}_8 + 0{,}80(u_9 + u_{10} + u_{11}) + 0{,}70u_{12} +$$
$$+ 1{,}56w_1 + 1{,}17w_3 + 1{,}24w_4 + 1{,}43(w_2 + w_5 + w_7) + 1{,}56w_6 + 1{,}30w_8 + 1{,}04(w_9 + w_{10} + w_{11}) + 0{,}91w_{12} +$$
$$+ 0{,}60(b_1 + \ldots + b_{12})$$

Il problema consiste nel calcolare il minimo della funzione (3) definita nell'insieme determinato dai vincoli (1) e (2).